TD Vibrations et ondes

2007-2008

Ondes : Correction

1. **Onde transversale et longitudinale, Onde progressive ***

(a) Onde tranversale : le déplacement correspondant à la perturbation est perpendicualire à la direction de propagation de l'onde.
Exemple : onde se propageant le long d'une corde tendue (ébranlement transversal à la corde).

Onde logitudinale : le déplacement correspondant à la perturbation est parallèle à la direction de propagation de l'onde.
Exemple : onde sonore se propageant dans un gaz (variations de pression des tranches d'air).

(b) Toute fonction deux fois dérivable de $x \pm ct$ représente une onde progressive se dirigeant vers les x positifs pour un signe '-' et vers les x négatifs pour un signe '+', à la vitesse c.
Par conséquent, $f(x,t) = \frac{A}{1+3(\alpha x-\beta t)^3} = \frac{A}{1+3\alpha^3(x-\frac{\beta}{\alpha}t)^3}$ représente bien une onde progressive se déplaçant dans la direction des x positifs à la vitesse $c = \beta/\alpha$.
Par contre, $g(x,t) = A\cos(\alpha x)\sin(\beta t) = \frac{1}{2}[\sin(\alpha x+\beta t) - \sin(\alpha x - \beta t)]$ est la superposition de deux ondes progressives, et correspond donc à une onde stationnaire.
Enfin, $h(x,t) = A\cos(\alpha t + x)$ représente bien une onde progressive dans la direction des x négatifs à la vitesse $c = \alpha$.

2. **Caractéristiques d'une onde : amplitude, fréquence, ... ***

(a) Cette onde transversale peut se réécrire sous la forme :

$$y(x,t) = 10\cos\left[2\pi\left(\frac{x}{200} - t\right)\right] \tag{1}$$

avec x et y en cm et t en s.

Il s'agit d'une onde sinusoïdale progressive dans la direction des x positifs de la forme :

$$y(x,t) = A\cos(kx-\omega t) = A\cos\left[\omega\left(\frac{x}{c} - t\right)\right] = A\cos\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right] \tag{2}$$

En identifiant les équations (1) et (2) il vient :
- Amplitude : A = 10 cm
- Fréquence : $f = \frac{1}{T} = 1$ Hz
- Longueur d'onde : $\lambda = 200$ cm $= 2$ m
- Vitesse de propagation : $c = \lambda f = 2$ m.s^{-1}
- Vecteur d'onde : $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \pi = 3.14$ m^{-1}

(b) Partons de l'expression : $y(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$.
- Vitesse d'un point de la corde (selon y puisque l'onde est transversale, à ne pas confondre avec la vitesse de propagation de l'onde, selon x) :

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = A\omega\sin(kx-\omega t) \Rightarrow v_{max} = A\omega = 2\pi A f = 0.63\text{m.s}^{-1}$$

- Accélération d'un point de la corde :

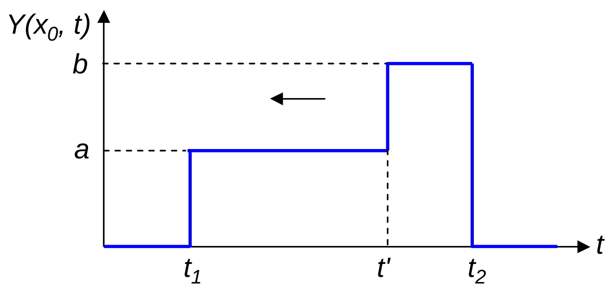
$$a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -A\omega^2\cos(kx-\omega t) \Rightarrow a_{max} = A\omega^2 = 4\pi^2 A f^2 = 3.95\text{m.s}^{-2}$$

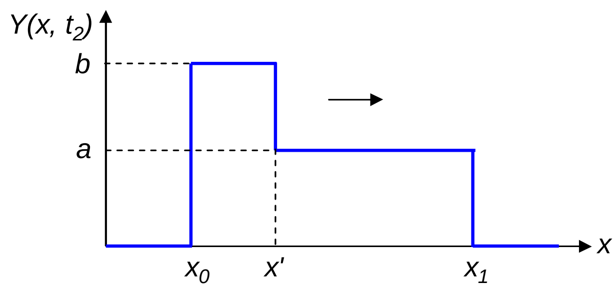
3. **Relation temps-espace ***

D'après le diagramme de l'ébranlement Y en fonction du temps à $x = x_0$ (voir figure de gauche ci-dessous), on voit que :
- il ne se passe rien entre $t = 0$ et $t = t_1$,
- ensuite, au temps $t = t_1$, $Y(x_0)$ passe de 0 à a : c'est le début de l'ébranlement,
- puis au temps $t = t'$, $Y(x_0)$ augmente de a à b,
- enfin, au temps $t = t_2$, $Y(x_0)$ passe de b à 0 : c'est la fin de l'ébranlement.

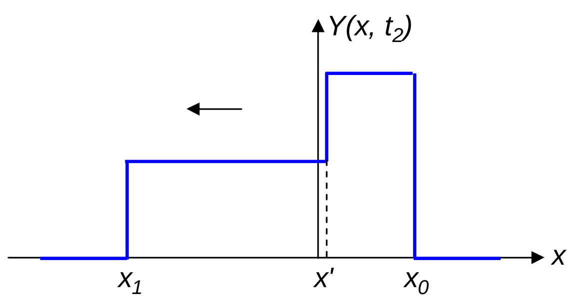
(a) Onde progressive vers les x positifs.
Diagramme de $Y(x)$ à $t = t_2$: en x_0 c'est la fin de l'ébranlement, d'après ce qui vient d'être vu. L'onde se propageant dans le sens des x positifs, le début de l'ébranlement est situé à une valeur de x supérieure à x_0, donc à droite de x_0 en orientant l'axe des x positivement vers la droite. Le début de l'ébranlement était situé en x_0 à l'instant t_1 (d'après le graphe $Y(t)$), donc entre les instants t_1 et t_2, il aura parcouru une distance $c(t_2 - t_1)$ sur la corde et sera donc situé en $x_1 = x_0 + c(t_2 - t_1)$. De la même façon, nous avons $x' = x_0 + c(t' - t_2)$ quand l'amplitude de l'ébranlement passe de a à b. On obtient ainsi le graphe $Y(x)$ de droite ci-dessous, inversé par rapport au graphe en fonction du temps.

Autrement dit, quand le temps défile, l'ébranlement avance de droite à gauche dans le graphe en temps, à une position donnée de la corde (faire défiler le temps revient à décaler l'origine du temps vers la droite), tandis que l'ébranlement avance vers la droite (vers les x croissants) dans le graphe en fonction de x. Ces graphes permettent aussi de comprendre pourquoi une onde progressive vers les x croissants est une fonction de $x - ct$: le signe opposé pour le terme en x et le terme en t montre bien que les deux graphes sont symétriques l'un de l'autre par rapport à l'axe Y.



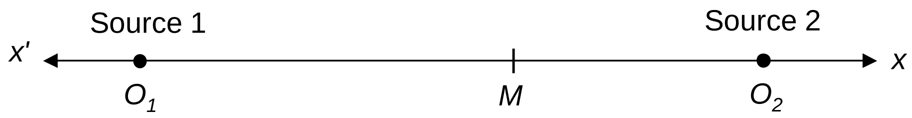


(b) Onde progressive vers les x négatifs.
L'ébranlement avance cette fois-ci de la droite vers la gauche, en x : le début de l'ébranlement est donc situé à gauche de la fin de l'ébranlement, comme pour le graphe en fonction du temps, d'où le graphe de la figure ci-dessous.



4. **Composition de deux vibrations** *

Vitesse de propagation de l'onde : $c = 1.5$ m.s^{-1}.
D'après y_1 et y_2, on a pour les deux sources la pulsation : $\omega = \pi$.
Le schéma ci-dessous illustre la position des deux sources et du point M.



Source 1 en O_1 : $y_1(O_1, t) = 0.03 \sin(\pi t) = a_1 \sin(\omega t)$
On choisit un repère $O_1 x$ orienté vers la droite et on a en M :
$y_1(M, t) = a_1 \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right]$ avec $x = O_1 M = 6$ m, soit

$$y_1(M,t) = 0.03 \sin\left[\pi\left(t - \frac{6}{1.5}\right)\right] = 0.03 \sin(\pi t - 4\pi) = 0.03 \sin(\pi t)$$

Source 2 en O_2 : $y_2(O_2, t) = 0.01 \sin(\pi t) = a_2 \sin(\omega t)$
On choisit un repère $O_2 x'$ orienté vers la gauche et on a en M :
$y_2(M, t) = a_2 \sin\left[\omega\left(t - \frac{x'}{c}\right)\right]$ avec $x' = O_2 M = 4$ m, soit

$$y_2(M,t) = 0.01 \sin\left[\pi\left(t - \frac{4}{1.5}\right)\right] = 0.03 \sin\left(\pi t - \frac{8\pi}{3}\right) = 0.03 \sin\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

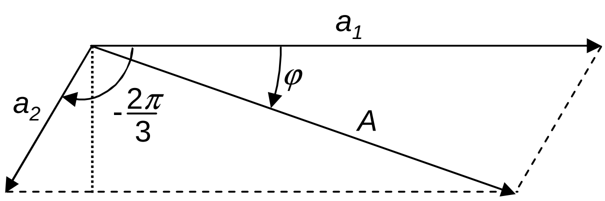
M vibre donc en phase avec O_1 et est déphasé de $-2\pi/3$ par rapport à la source 2

N.B.: si on choisit un repère $O_2 x$ orienté vers la droite, on retrouve bien le même résultat. En effet on a alors $y_2(M, t) = a_2 \sin\left[\omega\left(t + \frac{x}{c}\right)\right]$, puisque l'onde est maintenant progressive vers les x" négatifs, mais avec $x = O_2 M = -4$ m.

L'équation du mouvement du point M est donc la somme des deux signaux $y_1(M, t)$ et $y_2(M, t)$:

$$y(M,t) = y_1(M,t) + y_2(M,t) = 0.03 \sin(\pi t) + 0.03 \sin\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) = A \sin(\pi T + \phi)$$

Pour calculer l'amplitude A et la phase φ, on utilise la représentation de Fresnel (voir figure ci-dessous).



On a alors :

$$A = \sqrt{\left[0.03 + 0.01 \cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right]^2 + \left[0.01 \sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right]^2} = 0.0265$$

$$tan\varphi = \frac{0.01 \sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right)}{0.03 + 0.01 \cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right)} = -0.346 \Rightarrow \varphi = -0.33 rad = -19.1^\circ$$

On peut vérifier graphiquement que ces deux valeurs sont tout à fait cohérentes.
En conclusion : $y(M, t) = 0.0265 \sin(\pi T - 0.33)$

5. **Onde progressive sur une corde horizontale ***

Onde transversale $Y(x,t)$ le long d'une corde tendue horizontalement.

(a) masse linéique : $[\mu] = ML^{-1}$; tension : $[T] = MLT^{-2}$ $\Rightarrow$ $\left[\frac{T}{\mu}\right] = L^2T^{-2}$
Vitesse de propagation de l'onde : $[v] = LT^{-1}$

$$\text{d'où} \quad \boxed{v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}}$$

A.N.: $T = 4$ N, $\mu = 10^{-2}$ kg.m^{-1} $\Rightarrow v = \sqrt{400} = 20$ m.s^{-1}

(b) En $x = 0$: $y = y_0 \sin(\omega t)$ avec $y_0 = 10$ cm; $\omega = \pi$ rad.s^{-1}

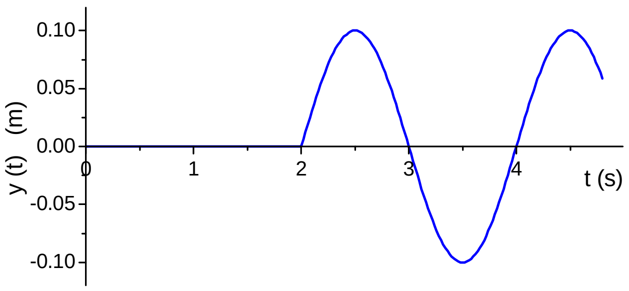
$\lambda = vT = v\,\frac{2\pi}{\omega} = 20 \times \frac{2\pi}{\pi} = 40$ m

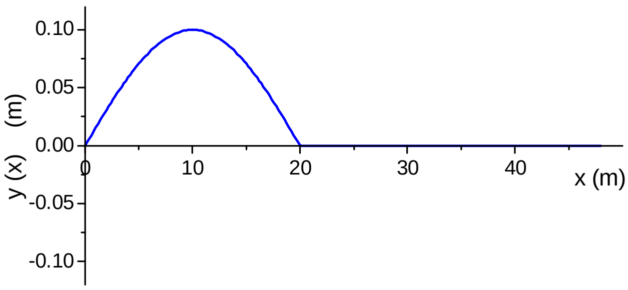
Pour $x > 0$: $y = y_0 \sin\left(\omega t - 2\pi\frac{x}{\lambda}\right) = 0.1 \sin\left[\pi\left(t - \frac{x}{20}\right)\right]$ avec t en s, x et y en m.

(c) Corde mise en mouvement à $t = 0$

$y(t, x_0 = 40\,m) = 0.1\sin(\pi t - 2\pi) = 0.1\sin(\pi t)$
Il faut attendre $t_0 = \frac{x_0}{v} = 2$ s pour que l'onde arrive en $x_0 = 40$ m. Donc $y(t, x_0 = 40\,m)$ commence à $t_0 = 2$ s, d'où le graphe ci-dessous (figure de gauche).

$y(t_1 = 1\,s, x) = 0.1\sin(\pi - \frac{\pi x}{20}) = 0.1\sin(\frac{\pi x}{20})$
Au bout de $t_1 = 1$ s, l'onde a avancé de $x_1 = vt = 20\,m = \frac{\lambda}{2}$, si bien que seuls les 20 premiers mètres de la corde sont en mouvement, d'où le graphe ci-dessous (figure de droite).





(d) Un élément dx de corde peut être considéré comme un oscillateur harmonique de masse $dm = \mu dx$ et de mouvement $y(t) = y_0\sin(\omega t - \varphi)$ (le déphasage φ dépendant de la position x de l'élément de corde considéré). L'énergie totale de cet élément de corde est donc : $\frac{1}{2}\,dm\,v_0^2 = \frac{1}{2}\,\mu dx\,\omega^2 y_0^2$ où $v_0 = \omega y_0$ est l'amplitude de la vitesse (voir cours sur les vibrations, relation (1.6) page 8). On en déduit l'énergie par unité de longueur (obtenue en divisant l'expression précédente par la longueur dx de l'élément de corde considéré) :

$$\boxed{\epsilon = \frac{1}{2}\,\mu\,\omega^2\,y_0^2}$$

L'énergie transportée pendant Δt correspond à une longueur de corde $\Delta x = v\Delta t$, où v est la vistesse de propagation de l'onde. La puissance est définie par $\mathcal{P} = \frac{\Delta\epsilon}{\Delta t}$ où $\Delta\epsilon$ représente l'énergie d'une longueur de corde Δx. On a donc : $\mathcal{P} = \dfrac{v\Delta t \times \frac{1}{2}\,\mu\,\omega^2\,y_0^2}{\Delta t} = \frac{1}{2}\,\mu\,v\,\omega^2\,y_0^2$

N.B. : Vérifions que $\mathcal{P}$ a la bonne dimension :
$[\mathcal{P}] = \frac{M}{L} \times \frac{L}{T} \times T^{-2} \times L^2 = MLT^{-2} \times LT^{-1} = [force] \times [vitesse]$: OK

Remarque : Autre méthode pour calculer $\mathcal{P}$:

La force transversale (i.e. perpendiculaire à la direction de la corde) appliquée au point x sur l'élément de corde dx vaut $F_\perp = -T_0 \frac{\partial y}{\partial x}$ (voir cours page 38). C'est une force de rappel.
La puissance instantanée fournie au point x (par unité de longueur) vaut donc :

$$\begin{aligned}
& \mathcal{P}_i = F_\perp . v = -T_0 \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t} \qquad \text{avec} \quad y(x,t) = y_0 \sin(\omega t - kx) \\
\Rightarrow \quad & \mathcal{P}_i = -T_0\, k\omega\, y_0^2 \cos^2(\omega t - kx) \qquad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{v} \text{ et } T_0 = \mu c^2 \\
\Rightarrow \quad & \mathcal{P} = \langle |\mathcal{P}_i| \rangle = \frac{1}{2} \mu\, v\, \omega^2\, y_0^2
\end{aligned}$$

6. **Onde progressive sur une corde verticale**

(a) Aucune masse n'est suspendue à l'extrémité inférieure de la corde, mais la corde à une masse m. Ainsi, la tension de la corde est due à sa propre masse. En un point z de la corde, la tension de la corde (dirigée vers le haut) est égale et opposée au poids de la masse de corde située en dessous de cette position. Ainsi, en $z = 0$ (extrémité inférieure de la corde), il n'y a aucune masse donc $T(0) = 0$, tandis qu'en $z = L$, le poids de la corde toute entière s'exerce et on a donc : $T(L) = mg$.

(b) La corde étant homogène, la masse de corde située entre 0 et z vaut : $dm(z) = m\ \frac{z}{L}$ et la tension en z vaut donc : $T(z) = dm(z)g = mg\ \frac{z}{L}$

(c) A l'exercice précédent, nous avons vu que la vitesse de propagation d'une onde le long d'une corde horizontale s'exprime : $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, où la tension T (et donc la vitesse v) est constante le long de la corde. Dans ce cas, le temps mis par l'onde pour se propager d'une extrémité à l'autre de la corde, de longueur L, serait $\Delta t = \frac{L}{v}$.

Ici, nous avons donc, en un point z de la corde verticale de masse m et de longueur L : $v(z) = \sqrt{\frac{T(z)}{\mu}}$ avec $\mu = \frac{m}{L}$, soit, d'après la question précédente :

$$v(z) = \sqrt{\frac{mg\ z}{\mu L}} = \sqrt{g\ z}$$

La vitesse de propagation de l'onde augmente avec la tension et donc avec z, autrement dit, l'onde se propage de plus en plus rapidement au fur et a mesure que l'on s'approche de l'extrémité supérieure de la corde.
La durée mise par l'onde pour parcourir toute la corde vaut alors :

$$\Delta t = \int_0^L \frac{dz}{v(z)} = \int_0^L \frac{dz}{\sqrt{gz}} = \left[2\sqrt{\frac{z}{g}} \right]_0^L \Rightarrow \boxed{\Delta t = 2\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

On vérifie que le résultat a bien la dimension d'une durée.

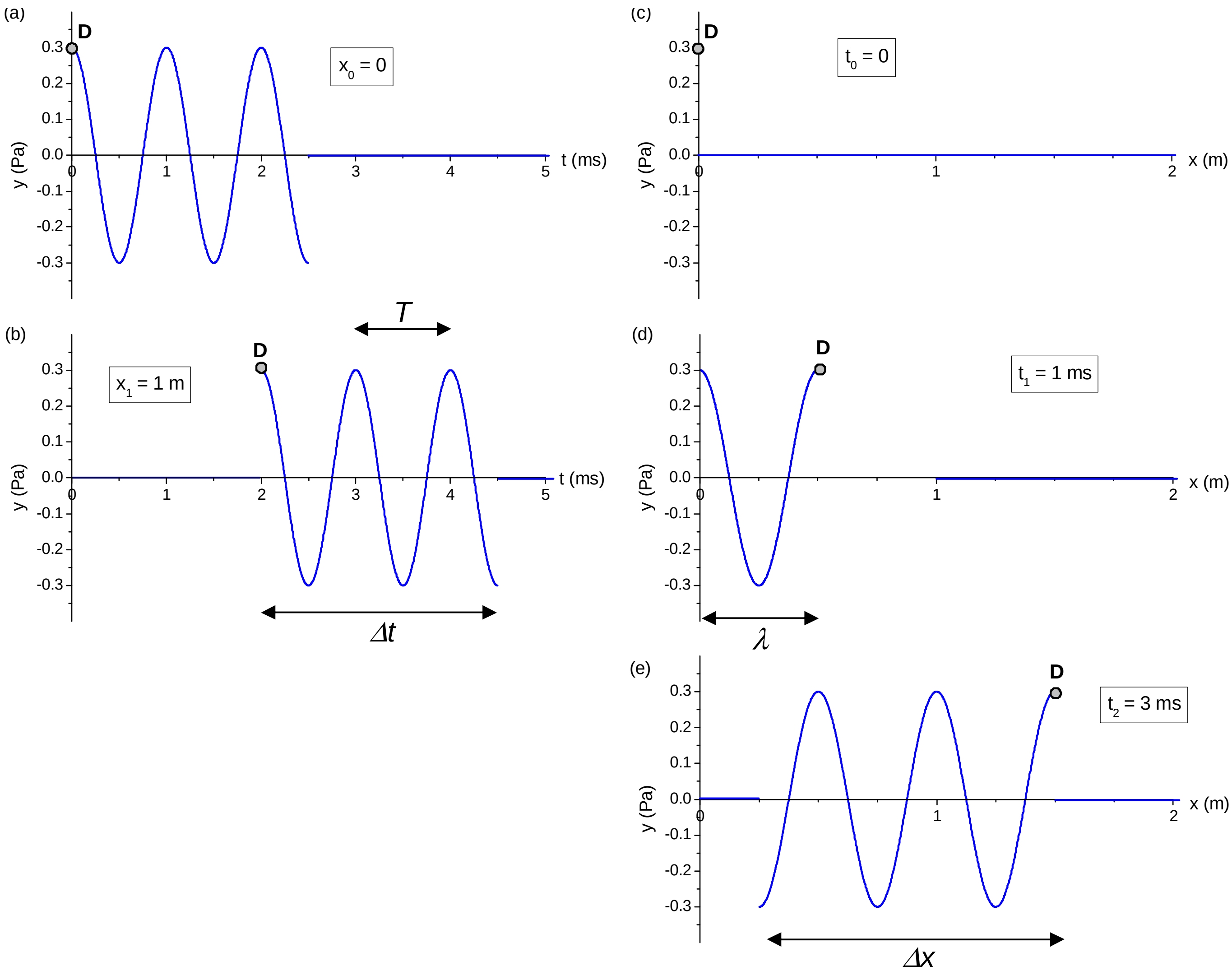
7. **Diagrammes d'un signal sonore**

onde sonore sinudoïdale vers les x croissants : $f = 10^3$ Hz, $v = 500$ m.s^{-1}, $A = 0.3$ Pa, $\Delta t = 2.5$ ms
source en $x = 0$ émet signal à partir de $t = 0$
signal maximum en $x = t = 0$

La fonction d'onde s'écrit donc: $y(x,t) = A\ \cos(\omega t - kx) = A\ \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$
avec $A = 0.3$ Pa, $T = 1$ ms, $\lambda = vT = 0.5$ m.

(a) $y(x_0 = 0, t) = 0.3\ \cos(2\pi t)$ avec y en Pa et t en ms.
La source émet entre $t = 0$ et $t = \Delta t = 2.5$ ms, donc la fonction $y(x_0 = 0, t) = 0.3\ \cos(2\pi t)$ est à tracer entre 0 et 2.5 ms. Le début du signal est en $t = 0$ (noté D sur le graphe), et la fin du signal en $t = 2.5$ ms. Pour $t > 2.5$ ms, $y(x_0 = 0, t) = 0$ (voir figure a).

$y(x_1 = 1\,\text{m}, t) = 0.3\ \cos\left[2\pi\left(t - \frac{1}{0.5}\right)\right] = 0.3\ \cos(2\pi t - 4\pi) = 0.3\ \cos(2\pi t)$ avec y en Pa, t en ms.
Mais il faut laisser le temps au signal d'arriver en $x_1 = 1$ m, le signal débutant à $x_0 = 0$ et $t = 0$. Le signal atteindra la position $x_1 = 1$ m au bout d'un temps $t_1 = x_1/v = 2$ ms.
Dit autrement : la distance entre x_0 et x_1 correspond à deux longueurs d'onde, donc il faudra attendre un temps t_1 égal à deux périodes, soit $t_1 = 2\,T = 2$ ms, pour que l'onde arrive en x_1.
La fonction $y(x_1 = 1\,\text{m}, t) = 0.3\ \cos(2\pi t)$ est donc à tracer entre $t_1 = 2$ ms et $t_2 = t_1 + \Delta t = 4.5$ ms. Le début du signal est en $t_1 = 2$ ms (noté D sur le graphe). Au-delà de $t_2 = 4.5$ ms (fin du signal), $y(x_1 = 1\text{m}, t) = 0$ (voir figure b).



(b) $y(x, t_0 = 0)$. A $t_0 = 0$, la source, située en $x = 0$, commence tout juste à émettre, si bien que le signal est non nul seulement en $x = 0$ (là ou est siutée la source). Donc $y(x = 0, t_0 = 0) = 0.3$ Pa, et partout ailleurs, $y(x, t_0 = 0) = 0$ (voir figure c).

$y(x, t_1 = 1\,\text{ms}) = 0.3 \cos\left[2\pi\left(1 - \frac{\text{x}}{0.5}\right)\right] = 0.3 \cos(2\pi - 4\pi\text{x}) = 0.3 \cos(4\pi\text{x})$ avec y en Pa, x en m. Mais la source n'émet que depuis 1 ms, soit une période ($t_1 = T$), si bien que le début du signal (noté D sur le graphe) se situe en $x_1 = \lambda = vt_1 = 0.5$ m. Et la durée du signal étant de $\Delta t = 2.5$ ms $> t_1$, la source émet toujours en $x = 0$ (on ne voit pas la fin du signal). En conclusion, nous avons $y(x, t_1 = 1\,\text{ms}) = 0.3 \cos(4\pi\text{x})$ entre $x = 0$ et $x = 0.5$ m, et $y(x, t_1 = 1\,\text{ms}) = 0$ pour $x > 1$ m (voir figure d).

$y(x, t_2 = 3\,\text{ms}) = 0.3 \cos\left[2\pi\left(3 - \frac{\text{x}}{0.5}\right)\right] = 0.3 \cos(6\pi - 4\pi\text{x}) = 0.3 \cos(4\pi\text{x})$ avec y en Pa, x en m. Mais la source émet depuis 3 ms ($t_2 = 3T$), si bien que le début du signal (noté D sur le graphe) se situe en $x_2 = 3\lambda = vt_2 = 1.5$ m. Par contre, la durée du signal est de $\Delta t = 2.5$ ms $= 2.5\,T$, si bien que le signal a une extension spaciale de $\Delta x = 2.5\lambda = 1.25$ m $< x_2$. Autrement dit, la fin du signal se situe en $x_3 = x_2 - \Delta x = 0.25$ m. En conclusion : $y(x, t_2 = 3\,\text{ms}) = 0.3 \cos(4\pi\text{x})$ pour $0.25 < x < 1.5$ m, $y(x, t_2 = 3\,\text{ms}) = 0$ partout ailleurs (voir figure e).