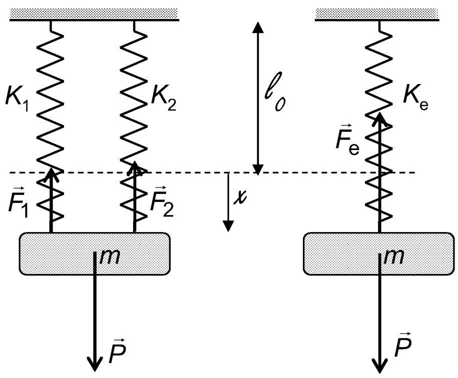
5. **Ressorts en série et en parallèle ***

(a) Ressorts en parallèle.



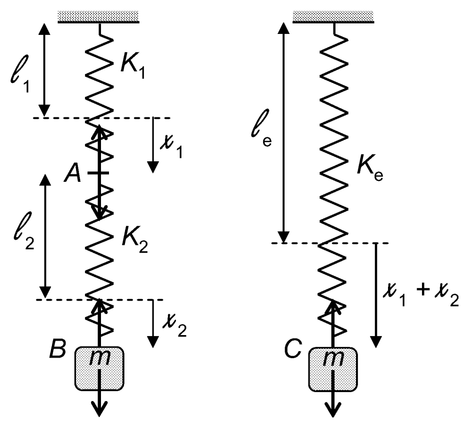
Pour résoudre ce problème, on considère que les 2 ressorts ont même longueur à vide l_0 et subissent le même allongement x (par rapport à leur longueur à vide) quand on accroche une masse m à l'extrémité des 2 ressorts. Le ressort équivalent, de raideur K_e, aura donc lui aussi la même longueur à vide et le même allongement (voir figure ci-dessus). On écrit la condition à l'équilibre au niveau de la masse m pour les 2 systèmes :

$$\begin{cases} mg & = K_1\ x + K_2\ x \\ mg & = K_e\ x \end{cases}$$

et donc :

$$\boxed{K_e = K_1 + K_2}$$

(b) Ressorts en série.



Soient l_1, l_2, l_e les longueurs à vide des ressorts 1, 2, et e (équivalent), et x_1, x_2, x_e leurs allongements respectifs. Pour résoudre ce problème on doit poser : $l_e = l_1 + l_2$ et $x_e = x_1 + x_2$ (voir figure ci-dessus). On écrit la condition d'équilibre en A, B et C :

$$\begin{cases} K_1\ x_1 & = K_2\ x_2 \\ mg & = K_2\ x_2 \\ mg & = K_e\ (x_1 + x_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & = \dfrac{K_2}{K_1}\ x_2 \\ K_2\ x_2 & = K_e\ (x_1 + x_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow K_2\ x_2 = K_e\ \left(\frac{K_2}{K_1}\ x_2 + x_2\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{K_e = \frac{K_1\ K_2}{K_1 + K_2} \qquad \text{ou encore} \qquad \frac{1}{K_e} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}}$$

6. **Ressorts et poulies ***

(a) Système de poulies et ressorts à l'équilibre.
Soient x_1° et x_2° les allongements des ressorts 1 et 2, et T_0 (et T_0') la tension du fil. Cette dernière intervient 2 fois au niveau de chaque poulie, et est dirigée verticalement, puisque le fil arrive d'un côté puis repart de l'autre, vers le bas ou vers le haut. Quant aux ressorts, puisque le fil se tend davantage sous l'effet de la masse M, la poulie A descend et la poulie B monte, si bien que les 2 ressorts sont en extension. D'après la figure ci-dessous, sur laquelle les différentes forces agissant en A, B et M sont représentées, les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\left\{\begin{array}{lrl} \text{en } M \ : & Mg & = T_0 \\ \text{en } A \ : & K_1\, x_1^\circ & = 2T_0 \\ \text{en } B \ : & K_2\, x_2^\circ & = 2T_0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow Mg = \frac{1}{2}K_1\, x_1^\circ = \frac{1}{2}K_2\, x_2^\circ$$

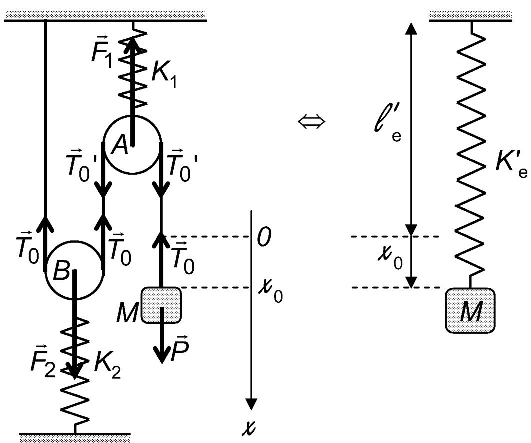
$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} x_1^\circ & = 2Mg \ / \ K_1 \\ x_2^\circ & = 2Mg \ / \ K_2 \end{array}\right. \tag{5}$$

Par ailleurs, quand la poulie A descend d'une quantité x_1° (et donc que le ressort 1 s'allonge de cette même quantité), le fil tourne autour de la poulie et on "perd" donc la longueur x_1° des deux côtés de la poulie. Ainsi, le fil s'allonge de 2 fois x_1° au niveau de la masse M. Le raisonnement est le même lorsque la poulie B monte de x_2° : le fil s'allonge de 2 fois x_2° au niveau de la masse M. Au final, l'allongement x_0 total du fil lorsqu'on accroche la masse vaut :

$$x_0 = 2x_1^\circ + 2x_2^\circ \tag{6}$$

Et donc, en injectant les équations (5) dans l'équation (6) :

$$\boxed{x_0 = 4Mg\left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}\right)}$$



Système équivalent.
A l'équilibre : $Mg = K_e'\ x_0$ soit $x_0 = \dfrac{Mg}{K_e'}$, où x_0 représente l'allongement par rapport à la longueur à vide l_e' du ressort équivalent au système précédent. En identifiant cette expression à la relation précédente de x_0, il vient :

$$\frac{1}{K_e'} = 4\left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}\right) \quad \text{donc} \quad \boxed{K_e' = K_e^{\text{série}}/4}$$

Conclusion : Chaque poulie divise la raideur des ressorts par 2, et ce système est alors équivalent à 2 ressorts en série dont les raideurs ont été divisées par 4.

(b) Système hors équilibre.
On travaille désormais sur le système équivalent. Soit x l'allongement du ressort équivalent par rapport à sa longeur à vide l'_e. En appliquant le PFD et en projetant sur l'axe (O, x) on obtient :

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = Mg - K'_e x$$

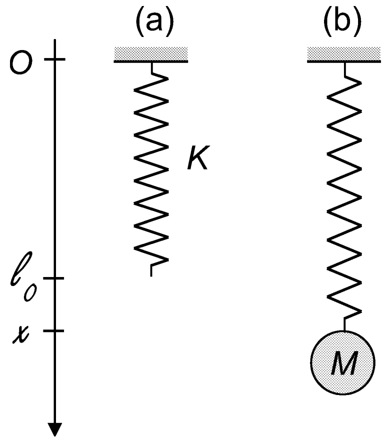
En utilisant l'équation à l'équilibre précédente pour le système équivalent, ainsi que l'expression de K'_e, on obtient :

$$\boxed{M\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{4}K_e\ (x - x_0) = 0} \quad \text{avec} \quad K_e = \frac{K_1\ K_2}{K_1 + K_2}$$

La pulsation des oscillations vaut donc :

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{K_e}{4M}} = \sqrt{\frac{K_1\ K_2}{4M(K_1 + K_2)}}}$$

7. **Conditions initiales ***



A l'équilibre
Soit x_0 la longueur à l'équilibre du ressort. L'équation à l'équilibre s'écrit :

$$Mg = K(x_0 - l_0) \quad \Rightarrow \quad x_0 = l_0 + \frac{Mg}{K}$$

N.B. : on a bien $x_0 > l_0$ puisque le ressort est étiré.

Hors équilibre
La masse M est à la position $x(t)$, et l'allongement du ressort vaut donc $x(t) - l_0$. En appliquant le PFD à la masse M et en projetant sur l'axe $(0, x)$, on obtient l'équation du mouvement :

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = Mg - K(x - l_0)$$

En injectant l'équation à l'équilibre dans l'équation du mouvement, il vient :

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = K(x_0 - l_0) - K(x - l_0) = -K(x - x_0) \quad \text{soit} \quad M\frac{d^2x}{dt^2} + K(x - x_0) = 0$$

Posons $X = x - x_0$ et $\omega = \sqrt{K/M}$. X(t) repère l'écart à l'équilibre et l'équation du mouvement précédente se réécrit :

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \omega^2 X = 0$$

La solution est :

$X(t) = X_m \cos(\omega t + \phi)$, où X_m est l'amplitude des oscillations et ϕ la phase à l'origine.

(a) On accroche M au ressort et on la lâche sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$.

$$\text{à } t=0 \quad \begin{cases} x = l_0 & \rightarrow \quad X = l_0 - x_0 \\ v = 0 & \rightarrow \quad \frac{dX}{dt} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X_m \cos\phi & = l_0 - x_0 \\ -X_m\omega \sin\phi & = 0 \end{cases}$$

donc $\phi = 0$ ou π et $X_m = -\frac{Mg}{K\cos\phi}$. En général, on choisit ϕ tel que $X_m > 0$, donc ici, on choisit :

$$\phi = \pi \Rightarrow X_m = +\frac{Mg}{K}$$

On a donc :

$$X(t) = \frac{Mg}{K}\cos(\omega t + \pi) = -\frac{Mg}{K}\cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = x_0 + X(t) = l_0 + \frac{Mg}{K} - \frac{Mg}{K}\cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x(t) = l_0 + \frac{Mg}{K}\left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{K}{M}}\, t\right)\right]}$$

(b) On accroche M au ressort et on la lâche à l'instant $t = t_0$ en lui donnant une vitesse initiale v_0 vers le bas.

$$\text{à } t=t_0 \quad \begin{cases} x = l_0 & \rightarrow \quad X = l_0 - x_0 \\ v = v_0 & \rightarrow \quad \frac{dX}{dt} = v_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X_m \cos(\omega t_0 + \phi) & = l_0 - x_0 = -\frac{Mg}{K} \qquad (i) \\ -X_m\omega \sin(\omega t_0 + \phi) & = v_0 \qquad (ii) \end{cases}$$

$$\frac{(i)}{(ii)} : \qquad \omega \tan(\omega t_0 + \phi) = \frac{Kv_0}{Mg}$$

$$\Rightarrow \phi = \operatorname{atan}\left(\frac{Kv_0}{Mg\omega}\right) - \omega t_0 \quad [\pi]$$

$$(i)^2 + (ii)^2 : \qquad X_m^2 = \left(\frac{Mg}{K}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2$$

$$\Rightarrow X_m = \pm\sqrt{\left(\frac{Mg}{K}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$

Si on choisit $X_m > 0$, alors il faut ajouter π dans l'expression de ϕ (en effet, pour avoir $\cos(\omega t_0 + \phi) < 0$ dans l' expression (i), il faut $\pi/2 < \phi < 3\pi/2$). Au final, nous avons :

$$\boxed{x(t) = l_0 + \frac{Mg}{K} + \sqrt{\left(\frac{Mg}{K}\right)^2 + \frac{M}{K}v_0^2}\ \cos\left(\sqrt{\frac{K}{M}}(t - t_0) + \operatorname{atan}\left(\sqrt{\frac{K}{M}}\frac{v_0}{g}\right) + \pi\right)}$$

Application numérique : $K = 100$ N/m, $M = 100$ g et $v_0 = 1$ m/s. On prendra g $= 10$ m.s^{-1}

pulsation $\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{1000} = 31.6$ rad.s^{-1} pour (a) et (b)

période $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{1000}} = 0.2$ pour (a) et (b)

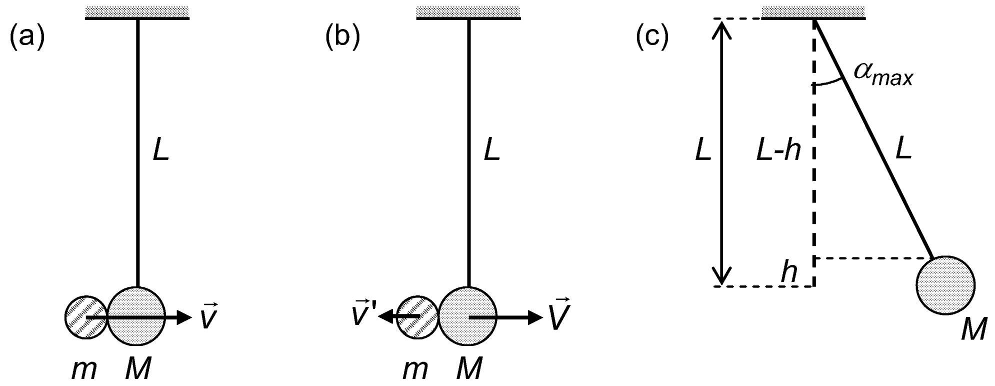
amplitude pour (a) : $X_m = \frac{Mg}{K} = 1/100 = 10^{-2}$ msoit1cm

amplitude pour (b) : $X_m = \sqrt{\left(\frac{Mg}{K}\right)^2 + \frac{M}{K}v_0^2} = \sqrt{\frac{1}{10^4} + \frac{1}{1000}} = \sqrt{11}\ 10^{-2}$ m $= 3.3$ cm

phase à l'origine pour (a) : $\phi = \pi$ soit180°

phase à l'origine pour (b) : $\phi = \operatorname{atan}\left(\sqrt{\frac{K}{M}}\frac{v_0}{g}\right) + \pi = \operatorname{atan}\left(0.1\sqrt{1000}\right) + \pi = 252.5°$

8. **Energies cinétique et potentielle**



(a) Hauteur h atteinte par la masse M après le choc ?

1$^{\text{ère}}$ étape :

Déterminer la vitesse V de la masse M juste après le choc élastique de m sur M.
Pour le système $[m + M]$, on a :

avant le choc - *figure (a)*

$$\begin{cases} E_{cin} = \frac{1}{2}mv^2 \\ p = mv \end{cases}$$

après le choc - *figure (b)*

$$\begin{cases} E'_{cin} = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}MV^2 \\ p' = mv' + MV \end{cases}$$

Pour un choc élastique, on peut écrire la conservation de l'énergie cinétique et de la quantité de mouvement, ce qui donne, en posant $m = M/2$:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}Mv^2 &= \frac{1}{4}Mv'^2 + \frac{1}{2}MV^2 \\ \frac{1}{2}Mv &= \frac{1}{2}Mv' + MV \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v^2 &= v'^2 + 2V^2 \\ v &= v' + 2V \end{cases}$$

On veut exprimer V en fonction de v. En injectant la deuxième équation, $v' = v - 2V$, dans la première, il vient :

$$\begin{aligned} & v^2 = (v - 2V)^2 + 2V^2 = v^2 - 4vV + 6V^2 \\ \Rightarrow\ & 4vV = 6V^2 \\ \Rightarrow\ & \boxed{V = \frac{2}{3}v} \quad \text{et} \quad v' = -\frac{1}{3}v \end{aligned}$$

2$^{\text{ème}}$ étape :

Ecrire la conservation de l'énergie totale (potentielle + cinétique) pour le pendule M.
Pour le système $[M]$, on a :

juste après le choc - *figure (b)*

$$\begin{cases} E_{cin} = \frac{1}{2}MV^2 = \frac{2}{9}Mv^2 \\ E_{pot} = 0 \end{cases}$$

quand M atteint la hautuer maximale - *figure (c)*

$$\begin{cases} E'_{cin} = 0 \\ E'_{pot} = Mgh \end{cases}$$

On écrit la conservation de l'énergie totale :

$$\begin{aligned} & E_{cin} + E_{pot} = E'_{cin} + E'_{pot} \\ & \frac{2}{9}Mv^2 = Mgh \\ \Rightarrow\ & \boxed{h = \frac{2v^2}{9g}} \end{aligned}$$

Amplitude du mouvement d'oscillation α_{max} :

$$\begin{aligned} & L-h = L\cos\alpha_{max} \\ \Rightarrow \quad & \cos\alpha_{max} = \frac{L-h}{L} = 1-\frac{h}{L} \\ \Rightarrow \quad & \boxed{\alpha_{max} = \arccos\left(1-\frac{2v^2}{9gL}\right)} \end{aligned}$$

(b) Condition sur v pour que le mouvement soit harmonique, c-à-d pour que $\sin\alpha < 0.1$?

α petit $\Rightarrow \sin\alpha \simeq \alpha$, $\cos\alpha \simeq 1-\frac{\alpha^2}{2}$

$\Rightarrow \cos\alpha_{max} = 1-\frac{2v^2}{9gL} \simeq 1-\frac{\alpha^2_{max}}{2}$

$\Rightarrow \alpha_{max} \simeq \frac{2v}{3\sqrt{gL}}$

La condition $\sin\alpha < 0.1$ se réécrit $\alpha_{max} < 0.1$ et donc $\frac{2v}{3\sqrt{gL}} < 0.1$, soit

$$\boxed{v < 0.15\sqrt{gL}}$$

(c) Equation horaire $\alpha(t)$ après le choc ?

Le théorème du moment cinétique s'exprime : $I\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \overline{\mathcal{M}}_{\vec{P}} = -MgL\sin\alpha$
où le moment d'inertie vaut : $I = ML^2$ et où on peut faire l'approximation suivante : $\sin\alpha \simeq \alpha$, puisque qu'on est dans le cas d'un mouvement harmonique (donc de faible amplitude).
L'équation du mouvement se réécrit donc :

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{L}\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \alpha(t) = A\cos(\omega t+\phi) \qquad \text{avec} \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Conditions initiales à $t=0$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & 0 \qquad\quad \rightarrow \quad A\cos\phi \quad = \quad 0 \quad \rightarrow \quad \phi \; = \; \pm\frac{\pi}{2} \\ \frac{d\alpha}{dt} & = & \frac{V}{L} = \frac{2v}{3L} \quad \rightarrow \quad -A\omega\sin\phi \quad = \quad \frac{2v}{3L} \end{array}\right.$$

On choisit $\phi = -\frac{\pi}{2}$ pour avoir $A > 0$

$\rightarrow A = \frac{2v}{3\omega L} = \frac{2}{3}\,\frac{v}{\sqrt{gL}}$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha(t) = \frac{2}{3}\,\frac{v}{\sqrt{gL}}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\,t-\frac{\pi}{2}\right)}$$

9. **Oscillations libres amorties d'une voiture ***