CORRIGE TD n°3

EXERCICE 1 : onde harmonique

Soit une onde harmonique d'amplitude 2 cm dont la longueur d'onde est de 10 cm .La vitesse de propagation est de 40 cm/s vers la droite. Si y = 0 à x = 0 et à t = 0 et que la vitesse transversale est alors positive, déterminez complètement l'équation de l'onde $y(x,t)$.

Représentez cette onde à t=0 puis à t=1/8 s.

CORRECTION

$y(x,t)$ doit décrire une onde harmonique, elle est donc de la forme :

$y(x,t) = A\cos(\omega t - kx) + B\sin(\omega t - kx)$ avec $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = 62{,}8$ m^{-1} , $T = \lambda / c = 0{,}25$ s , et

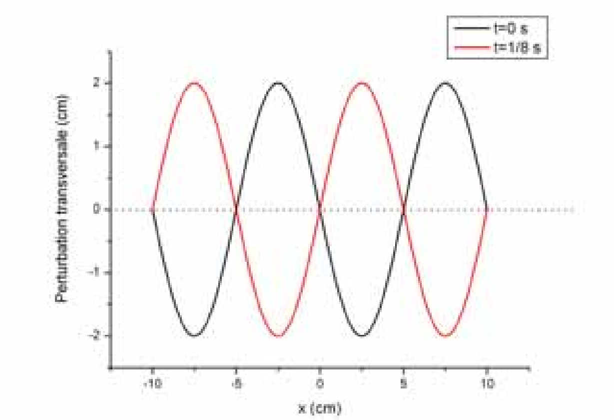
$\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 25{,}1$ rad.s^{-1} .

A $t = 0$ et $x = 0$, $y = 0$, on en déduit que A = 0, et donc que B correspond à l'amplitude de l'onde ($\sqrt{A^2 + B^2} = amplitude$ = 2 cm).

L'onde est donc entièrement décrite par l'équation $y(x,t) = B\sin(\omega t - kx)$ avec :

- B = 2 cm
- $\omega = 25{,}1$ rad.s^{-1}
- $k = 62{,}8$ m^{-1}

A t = 0, $y(x,0) = -B\sin(kx)$. On en déduit la courbe représentant la perturbation à t = 0.



A t = 0,125 s, $y(x,0) = B\sin(\pi - kx) = \sin(kx)$

EXERCICE 2 : onde progressive

Une lame vibrante, de fréquence f = 100 Hz, est munie d'une pointe qui produit en un point O de la surface d'une nappe d'eau une perturbation transversale, sinusoïdale, d'amplitude 1 mm, se propageant dans toutes les directions du liquide à la vitesse constante de 36 cm/s.

A l'origine des temps, la source commence à vibrer à partir de sa position d'équilibre, en se déplaçant vers le haut.

Pourquoi le mouvement de la source ne peut-il pas être harmonique au cours des premiers instants après t = 0 ?

Dans la suite on négligera cet effet, et on admettra que le mouvement de la source est harmonique dès que le premier instant.

1. Ecrire l'équation du mouvement de O en fonction du temps, puis l'équation du mouvement des points M et N, situés respectivement à 6,3 mm et à 9,0 mm de O. (On négligera la variation d'amplitude au cours de la propagation).
2. Comparer le mouvement des deux points considérés au mouvement de la source.
3. Représenter graphiquement le mouvement de O, de M et de N en fonction du temps.
4. Représenter graphiquement à l'instant t = 0,02 s, puis à l'instant t = 0,025 s, le profil de l'eau au voisinage de sa surface, en fonction de la distance à la source.
   Tenir compte du fait que la source ne vibrait pas encore à t < 0 !

CORRECTION

Une onde harmonique existe depuis tout temps. Il faut donc au minimum un temps de mise en place à l'onde harmonique, il faut une durée minimale à sa mise en place pour que l'on puisse définir la longueur d'onde.

1. On a des ondes circulaires qui se déplacent à la surface de l'eau. Elles ne vont donc dépendre que de la coordonnée d'espace r. La période de l'onde est de 10 ms (fréquence de 100 Hz) et la vitesse est de 36 cm/s. On en déduit la longueur d'onde :
$\lambda = cT = 36 \times 0,01 = 0,36$ cm. A l'origine l'amplitude est nulle, on en déduit que la perturbation $y(t,r) = A\sin\left(\omega t - kr\right)$ avec :

- A = 1 mm
- $\omega = 2\pi f = 628$ rad/s
- $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = 17,4$ cm^{-1}

On en déduit que :

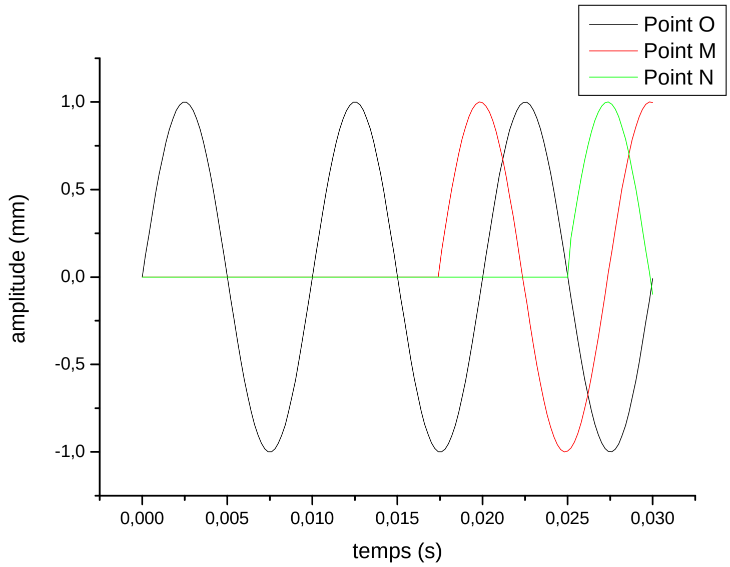
$y(t,0) = A\sin\left(\omega t\right)$ pour $t > 0$ et 0 sinon

$y(t,M) = A\sin\left(\omega t - 10,9\right)$ pour t > 17,5 ms et 0 sinon

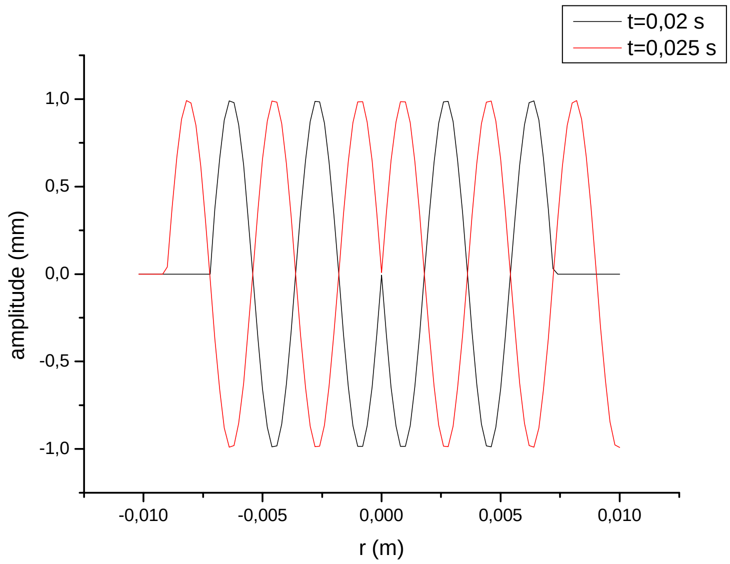
$y(t,N) = A\sin\left(\omega t - 15,6\right)$ pour t > 25 ms et 0 sinon.

2. Le mouvement est identique mais retardé dans le temps dû au temps de propagation.

3. Représentation en fonction du temps.



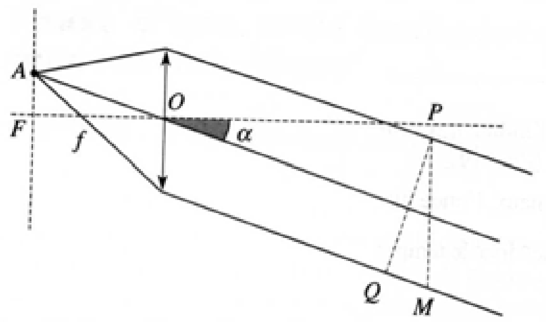
4.



EXERCICE 3 : Comparaisons de chemins optiques

Soit une lentille mince convergente dans l'air, éclairée par une source ponctuelle placée dans le plan focal objet, hors du foyer (on posera $PM = a$).
Calculer les différences de chemins optiques représentés sur la figure:

1. (AQ)-(AP)
2. (AM)-(AP)

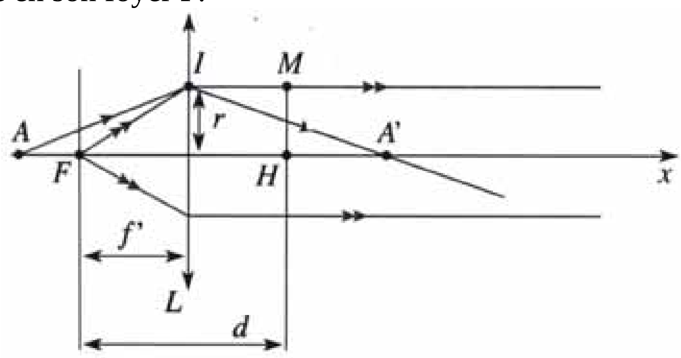


CORRECTION

1. Utilisons le théorème de Malus exprimant que les rayons sont perpendiculaires aux surfaces d'ondes. Une surface d'onde représente l'ensemble des points tels que les chemins optiques issus d'une source ponctuelle sont identiques.
   Cela nous permet d'affirmer, comme PQ est perpendiculaire aux rayons, que (AQ)=(AP), c'est-à-dire que (AQ) - (AP) = 0.
2. Nous pouvons écrire : (AM) - (AP) = (AQ) + (QM) – (AP) = (QM) d'après le résultat précédent.
   Or (QM) = QM = PM sin α = a sin α.

EXERCICE 4 : relation de conjugaison d'une lentille mince

On considère le montage représenté ci-après. La lentille convergente L, de distance focale f', est taillée dans un verre d'indice n et son épaisseur maximale est e_0. Une source lumineuse ponctuelle est placée en son foyer F.



1. Déterminer le chemin optique (FM) et en déduire l'épaisseur de la lentille en fonction de r.
2. Retrouver la relation de conjugaison, liant les abscisses x_A et $x_{A'}$ de deux points conjugués.

CORRECTION

1. Soit *H*, la projection de *M* sur l'axe optique. D'après le théorème de Malus, H et M appartiennent à la même surface d'onde, donc (*FM*) = (*FH*).
   Or $(FH) = n_{air}(d - e_0) + ne_0 = d + (n-1)e_0$. Nous en concluons que :
   $(FM) = d + (n-1)e_0.$
   Avec un raisonnement semblable, dans les conditions de Gauss, c'est-à-dire pour des rayons faiblement inclinés :
   $$(FM) = FI + IM + (n-1)e(r) = f'\left(1+\frac{r^2}{2f'^2}\right) + d - f' + (n-1)e(r)\,.$$

En identifiant les deux expressions de (FM), il vient : $e(r) = e_0 - \dfrac{r^2}{2(n-1)f'}$.

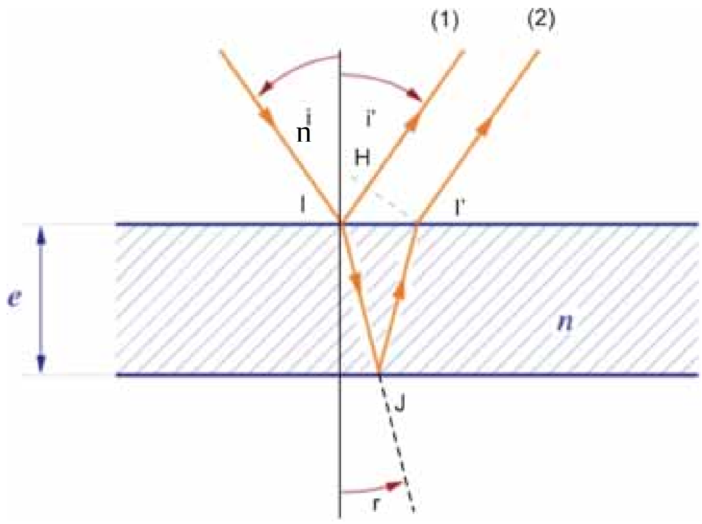
2. A et A' étant conjugués par L, l chemin optique (AA') est indépendant du point I. Dans les conditions de Gauss :
(AA') = AI + IA' + (n – 1)e(r).
En utilisant les résultats précédents :
$$(AA') = (-x_A)\left(1+\frac{r^2}{2x_A^2}\right) + x_A\left(1+\frac{r^2}{2x_A^2}\right) + (n-1)e_0 - \frac{r^2}{2f'}.$$

(AA') ne dépend pas de r si $-\dfrac{1}{x_A} + -\dfrac{1}{x_{A'}} = \dfrac{1}{f'}$. Cette relation est bien la relation de conjugaison de Descartes.

EXERCICE 5 : Calcul de différence de marche

Soit un rayon de longueur d'onde λ, incliné d'un angle i par rapport à la normale d'une lame à faces parallèles d'épaisseur e et d'indice n. Il se réfléchit partiellement sur la première face et sur la deuxième face comme sur la figure.

1. Calculer en détail la différence de chemin optique entre les rayons réfléchis après la lame.
2. En déduire le déphasage entre les deux rayons.



CORRECTION

1. En appliquant le théorème de Malus, on remarque que la différence de marche entre les rayons (1) et (2) s'écrit : $\delta_{21} = (IJI') - (IH)$. On va d'abord déterminer (IJI') puis (IH).
$(IJ) = n\dfrac{e}{\cos r}$ et donc $(IJI') = 2n\dfrac{e}{\cos r}$.

$(IH) = II' \sin i$ et $II' = 2e \tan r = 2e \dfrac{\sin r}{\cos r}$. On en déduit que :

$(IH) = 2e \dfrac{\sin r}{\cos r} \sin i = 2ne \dfrac{\sin^2 r}{\cos r}$

Finalement $\delta_{21} = (IJI') - (IH) = 2n \dfrac{e}{\cos r} - 2ne \dfrac{\sin^2 r}{\cos r} = \dfrac{2ne}{\cos r}\left(1 - \sin^2 r\right) = 2ne \cos r$.

2. On en déduit le déphasage entre les rayons (1) et (2) :

$\varphi_{21} = \dfrac{4\pi ne \cos r}{\lambda}$