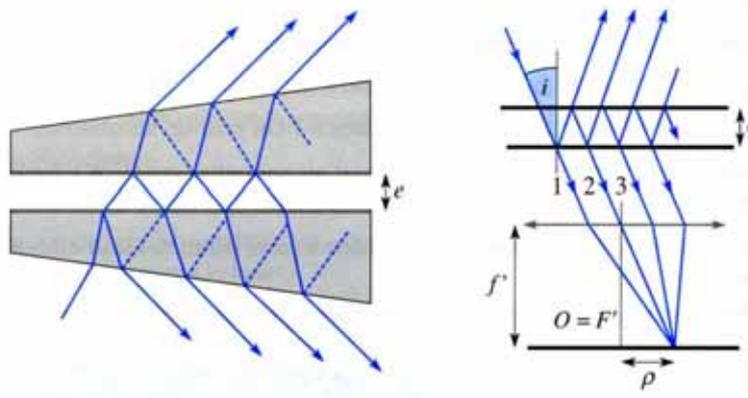


CORRIGE TD n°8

Interférences à N ondes: L'interféromètre de Pérot-Fabry

L'interféromètre à ondes multiples de Pérot-Fabry est constitué de deux lames de verre dont les faces en regard sont parallèles et traitées pour en augmenter le facteur de réflexion. Les lames sont biseautées pour que les ondes parasites, issues de réflexions sur les faces externes, aient des directions différentes et ne perturbent pas la figure d'interférences.



Nous supposons qu'il est possible de raisonner sur le schéma idéal de droite en oubliant l'épaisseur des lames.

L'appareil est éclairé par une onde monochromatique de longueur d'onde λ . Le coefficient de réflexion, en amplitude, sur les faces traitées est r (supposé réel) et on pose $R = r^2$.

1. CHOIX D'OBSERVATION

- a. R étant proche de 1, montrer qu'il faut observer la lumière en transmission, et qu'il faut tenir compte de tous les rayons transmis.
- b. L'interféromètre étant éclairé par une source large, justifier le choix du montage expérimental suggéré sur la seconde figure.

2. FIGURE D'INTERFERENCES

- a. On note \bar{s}_1 , l'amplitude complexe associée au premier faisceau transmis, noté T_1 . Exprimer l'amplitude associée au $n^{\text{ième}}$ faisceau transmis, notée \bar{s}_n .
- b. Montrer que l'éclairement au point M de l'écran d'observation est de la forme :

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_M}{1 + m_0 \sin^2(\varphi/2)}.$$

Exprimer m_0 et φ en fonction de R , e , i , λ .

- c. Montrer que les franges d'interférences sont des anneaux.
- d. Soit p_0 l'ordre au centre des anneaux. On note $p_0 = m + \varepsilon$, avec m entier et $0 < \varepsilon \leq 1$. Exprimer le rayon ρ_n du $n^{\text{ième}}$ anneau brillant, en supposant l'angle i_n petit.

3. FINESSE DES ANNEAUX

- a. Tracer $\mathcal{E}(\varphi)$, puis $\mathcal{E}(\rho)$, où ρ est la position sur l'écran d'observation placé dans le plan focal image de la lentille convergente de distance focale f' . On prendra $R = 0,5$, puis $R = 0,8$, puis $R = 0,99$. En pratique, seuls les derniers cas sont représentatifs des interféromètres réels.
- b. Exprimer le contraste Γ en fonction de R . Commenter les valeurs obtenues dans les trois cas numériques précédents.
- c. Déterminer la largeur à mi-hauteur $\Delta\varphi$ de la courbe $\mathcal{E}(\varphi)$ au voisinage d'un maximum, et la largeur $\Delta\rho$ correspondante de la courbe $\mathcal{E}(\rho)$. On se limitera au cas où R est proche de 1.
- d. On définit la finesse \mathcal{F} de l'appareil par : $\mathcal{F} = \frac{2\pi}{\Delta\varphi}$. Déterminer numériquement cette finesse pour les trois cas précédents. Pour distinguer deux interféromètres de Fabry-Pérot, vaut-il mieux les caractériser par leur contraste ou par leur finesse ?

4. RESOLUTION D'UN DOUBLET

La source comporte deux longueurs d'onde très proches (cas du doublet du sodium) λ et $\lambda + \delta\lambda$. Elles donnent un maximum d'éclairement pour le même ordre d'interférence pour deux valeurs très proches ρ et $\rho + \delta\rho$.

Déterminer $\delta\rho$ en fonction de f' , p , e , ρ , et $\delta\lambda$.

A quelle condition les deux raies sont-elles vues séparées ? Montrer que cela conduit à $\frac{\lambda}{\delta\lambda} < \mathcal{R}$, où \mathcal{R} est le pouvoir de résolution que l'on calculera en fonction de R et de p .

Application : les deux raies du sodium (589,0 nm et 589,6 nm) sont-elles séparées :

- **Cas 1** : pour $R = 0,5$ et $e = 0,05$ mm ?
- **Cas 2** : pour $R = 0,5$ et $e = 0,1$ mm ?
- **Cas 3** : pour $R = 0,9$ et $e = 0,05$ mm ?

CORRECTION

1. CHOIX D'OBSERVATION

- a. Pour R étant proche de 1 :
 - Le premier faisceau réfléchi est nettement plus lumineux que les suivants : il y a de la lumière réfléchie, mais pas de contraste pour les interférences ;
 - Les faisceaux transmis donnent des éclaircissements successifs voisins, avec une lente décroissance d'un faisceau au suivant : on peut attendre des franges bien contrastées, mais il faut tenir compte de tous les rayons transmis pour effectuer l'étude.
- b. Avec une source large, les franges données par une lame à faces parallèles sont localisées à l'infini.

L'observation se fait par transmission et à l'infini, c'est-à-dire dans le plan focal d'une lentille convergente.

2. FIGURE D'INTERFERENCES

- a. L'onde transmise de rang $n + 1$ subit deux réflexions de plus que l'onde de rang n . Leurs amplitudes sont donc dans le rapport $r^2 = R$.

Le calcul est celui du déphasage introduit par une lame d'air à faces parallèles :

$$\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} \text{ avec } \delta = 2e \cos i \text{ et } \varphi = \frac{4\pi e \cos i}{\lambda}.$$

En amplitude complexe, on a : $\bar{s}_n = R^{n-1} e^{-i(n-1)\varphi} \bar{s}_1$.

- b. L'amplitude complexe résultant de la superposition des ondes réfléchies (une infinité en théorie) est :

$$\bar{s} = \bar{s}_1 \left(1 + R e^{-i\varphi} + \dots + R^{n-1} e^{-i(n-1)\varphi} + \dots \right) = \bar{s}_1 \sum_{m=0}^{\infty} (R e^{-i\varphi})^m$$

Nous reconnaissons une suite géométrique dont la somme est :

$$\bar{s} = \frac{\bar{s}_1}{1 - R e^{-i\varphi}}.$$

Calculons l'éclairement :

$$\mathcal{E} = \frac{\bar{s}\bar{s}^*}{s_1 s_1^*} = \mathcal{E}_M \frac{1}{1 + m_0 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}, \text{ avec } m_0 = \frac{4R}{(1-R)^2} \text{ et } \varphi = \frac{4\pi e \cos i}{\lambda}.$$

- c. L'éclairement ne dépend que de l'inclinaison i . A chaque valeur de i , correspond un anneau à l'infini, dont le rayon sur l'écran est $\rho = f'i$ pour des angles petits (optique de Gauss).

- d. L'ordre au centre des anneaux est : $p_0 = \frac{2e}{\lambda} = m + \varepsilon$, avec $0 < \varepsilon \leq 1$. Pour le premier anneau brillant, l'ordre d'interférence est m entier. Pour le $n^{\text{ième}}$, il vaut $m - n + 1$.

On a donc : pour le $n^{\text{ième}}$ anneau brillant, de rayon ρ_n :

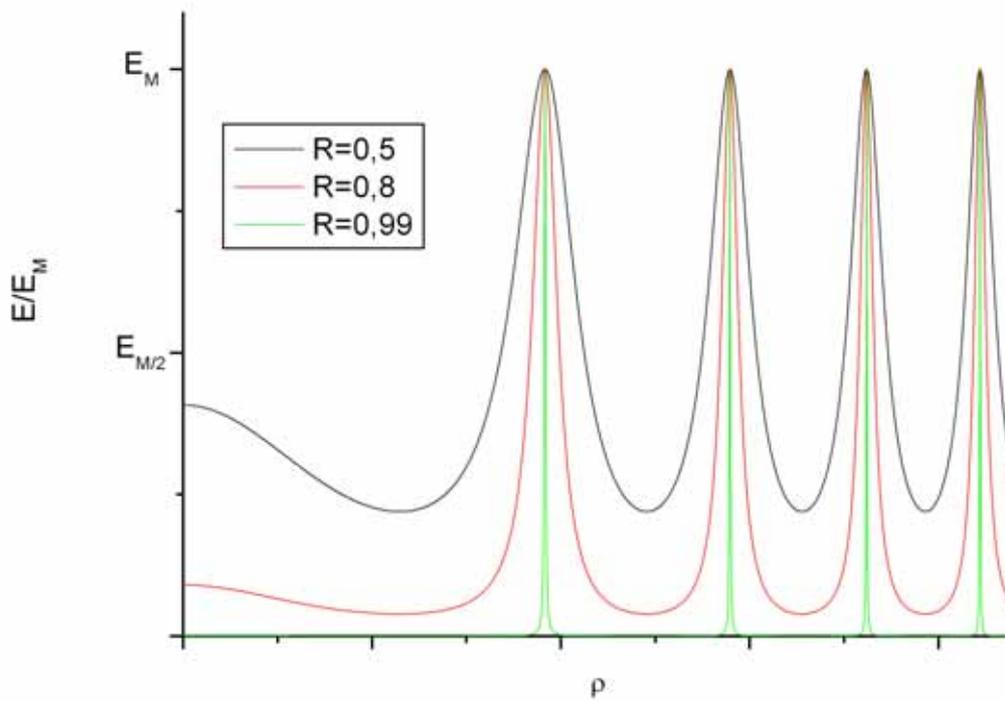
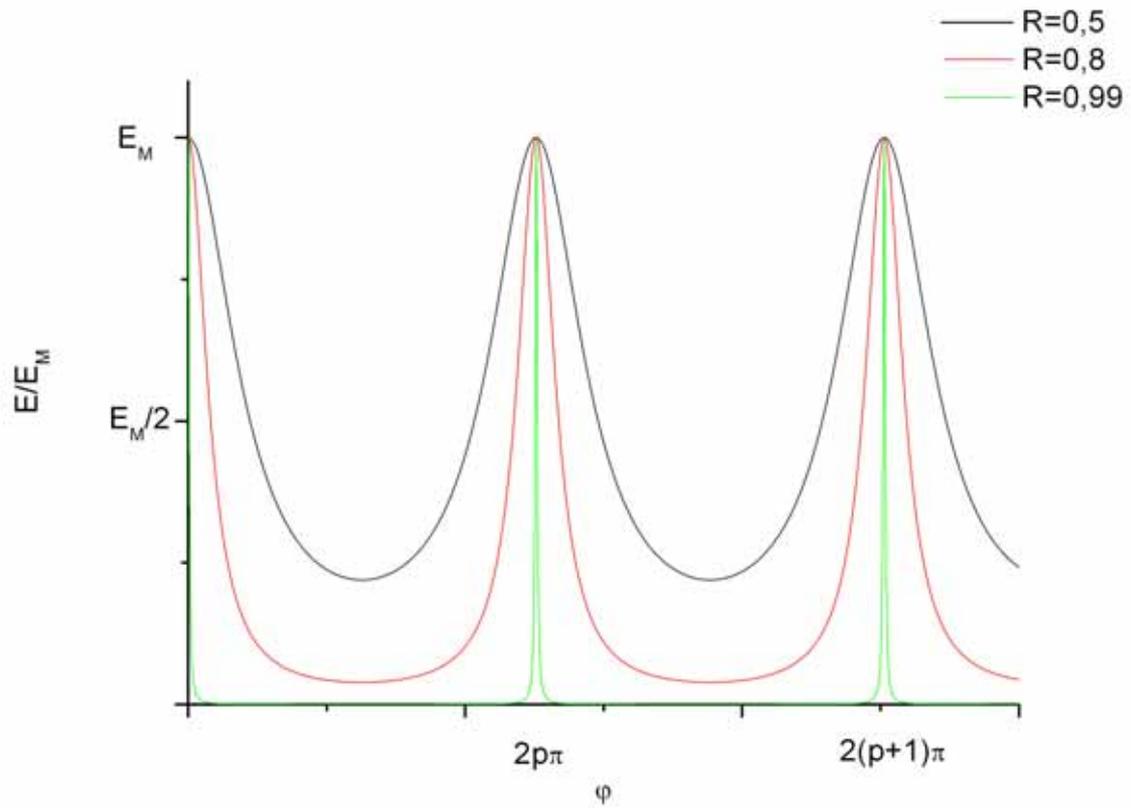
$$p_n = m - n + 1 \text{ et } p_n = \frac{2e \cos i_n}{\lambda} \approx p_0 - \frac{e i_n^2}{\lambda} \approx p_0 - \frac{e \rho_n^2}{\lambda f^2}, \text{ soit finalement :}$$

$$\rho_n = f' \sqrt{\frac{\lambda}{e} (n - 1 + \varepsilon)}.$$

3. FINESSE DES ANNEAUX

- a. Traçons les courbes :

$$\mathcal{E}(\varphi) = \frac{\mathcal{E}_M}{1 + m_0 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \text{ ou } \mathcal{E}(\rho) = \frac{\mathcal{E}_M}{1 + m_0 \sin^2 \left(\pi \left(p_0 - \frac{e \rho^2}{\lambda f^2} \right) \right)}.$$



Notons que pour la deuxième, l'ordonnée à l'origine, fonction de l'ordre p_0 est *a priori* inconnu.

b. Le contraste $\Gamma = \frac{\mathcal{E}_{\max} - \mathcal{E}_{\min}}{\mathcal{E}_{\max} + \mathcal{E}_{\min}}$.

Dans le cas étudié, $\mathcal{E}_{\max} = \mathcal{E}_M$ et $\mathcal{E}_{\min} = \frac{\mathcal{E}_M}{1+m_0}$, d'où $\Gamma = \frac{m_0}{m_0+2} = \frac{2R}{1+R^2}$.

Pour $R = 0,5 ; 0,8 ; 0,99$, il vient $\Gamma = 0,8 ; 0,98 ; 1$.

Pour un pouvoir réflecteur élevé ($R \geq 0,8$), le contraste des franges est pratiquement toujours égal à 1.

c. $\mathcal{E} = \mathcal{E}_M$ pour $\varphi = 2p\pi$ avec p entier.

$\mathcal{E}_{\max} = \mathcal{E}_M/2$ lorsque $m_0 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 1$ et pour $\varphi = 2p\pi \pm \frac{1}{2}\Delta\varphi$,

Soit $\sin \frac{\Delta\varphi}{4} = \frac{1}{\sqrt{m_0}}$.

Pour R proche de 1, m_0 est élevé et $\Delta\varphi \ll 2\pi$, il vient alors :

$$\Delta\varphi \approx \frac{4}{\sqrt{m_0}} = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}.$$

$\Delta\varphi$, et donc Δi et $\Delta\rho$ étant de très petites variations, on a :

$$\varphi \approx 2\pi \left(p_0 - \frac{e}{\lambda} \frac{\rho^2}{f'^2} \right), \text{ donc } \Delta\varphi = +4\pi \frac{e}{\lambda} \frac{\rho \Delta\rho}{f'^2}.$$

L'épaisseur caractéristique d'un anneau est donc :

$$\Delta\rho = + \frac{1-R}{2\pi\sqrt{R}} \frac{\lambda_0}{e} \frac{f'^2}{\rho}.$$

Les anneaux sont d'autant plus fins que R est proche de 1, que e est grand et que le rayon des anneaux est grand.

d. La finesse de l'appareil est :

$$\mathcal{F} = \frac{2\pi}{\Delta\varphi} = \frac{\pi\sqrt{m_0}}{2} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}.$$

Pour $R = 0,5 ; 0,8 ; 0,99$, il vient : $\mathcal{F} = 4,4 ; 14$ et 313 .

Si les deux derniers ont un contraste semblable, ils ont des finesesses très différentes. On va voir que la finesse des anneaux est importante pour séparer les raies.

4. RESOLUTION D'UN DOUBLET

Les longueurs d'onde λ et $\lambda + \delta\lambda$ donnent un maximum de même ordre pour des angles i et δi .

Cherchons pour p donné, la relation entre δi et $\delta\lambda$ en les assimilant à des différentielles.

$2e \cos i = p\lambda$, d'où $2e \sin i \delta i = p \delta\lambda$. On obtient :

$$\delta i = \frac{p}{2ei} \text{ et } \delta\rho = f'^2 \frac{p}{2e\rho} \delta\lambda, \text{ d'où } \mathcal{R} = p \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}.$$

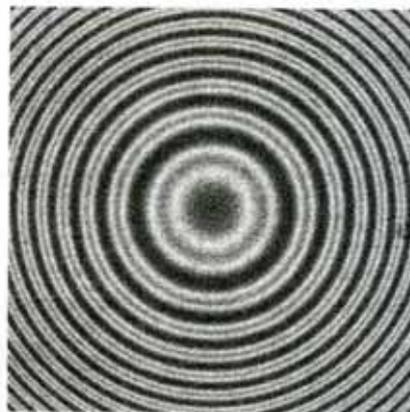
Or $\cos i \approx 1$ et donc $p \approx \frac{2e}{\lambda}$, d'où $\mathcal{R} = \frac{2\pi e\sqrt{R}}{(1-R)\lambda}$. Ici $\frac{\lambda}{\delta\lambda} \approx 1000$.

Les deux raies sont séparées si $\mathcal{R} > 1000$ (environ).

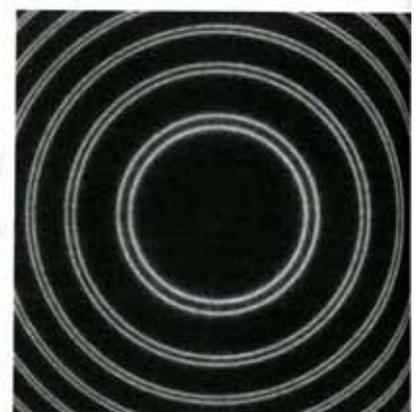
- **Cas 1 :** $\mathcal{R} \approx 750$: les raies sont très mal séparées (on ne voit quasiment qu'un seul système d'anneau).
- **Cas 2 :** $\mathcal{R} \approx 1500$: augmenter l'épaisseur améliore la finesse des raies, qui sont maintenant juste séparées.
- **Cas 3 :** $\mathcal{R} \approx 5000$: les raies sont séparées. Avec un interféromètre réel (R proche de 1), la séparation du doublet du sodium n'est pas un problème. En fait cet appareil très puissant permet d'analyser des détails très précis du spectre d'une source lumineuse et peut même accéder aux détails d'une raie spectrale (soi-disant) monochromatique : il suffit d'augmenter e dans le cas 3.



$R = 0,5$ $e = 0,05$ mm



$R = 0,5$ $e = 0,1$ mm



$R = 0,9$ $e = 0,05$ mm