

SOLUTIONS DES EXERCICES DE TRAVAUX DIRIGES

DE L'U.E. PHY241

(F = facile, M = moyen, D = difficile)

Charges dans la matière

1.(F) L'aluminium est un métal trivalent (${}_{13}^{27}\text{Al}$) de masse volumique $\rho = 2,7 \text{ g cm}^{-3}$. A quelle charge électrique correspondent les noyaux d'aluminium contenus dans 1 cm^3 de ce métal ? Même question pour les électrons libres. La charge d'une sphère d'aluminium de 1 cm^3 de volume, est limitée, en pratique, à 10^{-8} C environ ; dire à quelle fraction des électrons libres correspond cette charge maximum.

R : La masse atomique de Al (ou masse d'un atome-gramme, i.e. de $N = 6,02 \cdot 10^{23}$ atomes, nombre d'Avogadro) est $A = 27 \text{ g}$. Le nombre de noyaux contenus dans 1 cm^3 est donc $N = N_A \rho / A = 6,02 \cdot 10^{22}$. Ainsi, puisque le nombre de protons d'un noyau est égal au numéro atomique $Z = 13$, la charge électrique des noyaux contenus dans 1 cm^3 est $Q^+ = N Z e = 1,25 \cdot 10^5 \text{ C}$.

Al est trivalent ; chaque atome est donc susceptible de « libérer » 3 électrons (électrons de valence) et la charge en électrons libres dans 1 cm^3 est $Q^- = 3 Q^+ / Z = 2,9 \cdot 10^4 \text{ C}$.

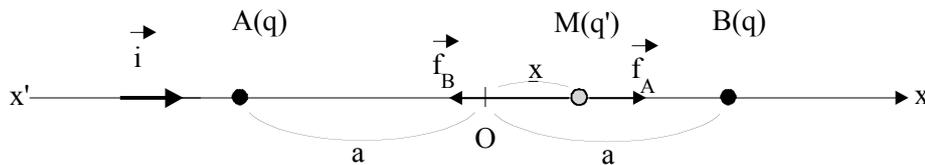
La charge limite de la sphère est la fraction $10^{-8} / 2,9 \cdot 10^4 = 3,5 \cdot 10^{-13}$ de la charge en électrons libres.

Remarque : la charge en électrons de valence est une charge nécessairement *compensée* par les protons des noyaux puisque chaque atome est électriquement neutre. La « charge limite » de la sphère est, quant à elle, une charge *additionnelle* ajoutée par un procédé ad hoc, et donc *non compensée* par des protons ; elle a ainsi peu à voir avec la charge en électrons de valence (sauf que les électrons dont elle est constituée sont également libres). C'est le *potentiel* pris par la sphère, grandeur proportionnelle à la charge additionnelle comme on le verra dans un module suivant, qui limite la valeur de cette charge additionnelle (il ne peut guère dépasser quelques milliers de Volts dans l'air).

Forces électrostatiques

2.(F) Deux charges électriques de même valeur q , sont fixées en A et B sur un axe $x'Ox$ aux abscisses $x_A = -a$ et $x_B = +a$. Entre A et B on place une charge q' libre de se déplacer sur l'axe. Quelle est la position d'équilibre de q' ? Quelle est la force exercée sur q' hors de sa position d'équilibre? Discuter de la stabilité de l'équilibre.

R :



Soit M portant q' , et $\overline{OM} = x$.

$$\text{Force résultante sur } M : \Rightarrow \vec{f} = K q q' \frac{-4ax}{(x^2 - a^2)^2} \vec{i} \Rightarrow$$

1/ équilibre pour q' en O (car si $x = 0$ on a $\vec{f} = \vec{0}$)

2/ - si $q q' > 0$, \vec{f} est dirigée vers $O \forall x \neq 0$: stabilité

- si $q q' < 0$, \vec{f} fuit $O \forall x \neq 0$: instabilité

3.(M) Un électroscope élémentaire est constitué de deux sphères identiques reliées chacune par un fil très fin non conducteur et sans masse, de $l = 10 \text{ cm}$ de longueur, à un point fixe M . Chaque sphère peut être considérée comme ponctuelle, et porte une charge électrique q de $3 \cdot 10^{-7} \text{ C}$. Quelle est la masse m de chaque sphère, sachant qu'à l'équilibre l'angle des fils avec la verticale est de 30° ?

R : Le dispositif est symétrique par rapport à l'axe \overline{Ox} .

Soit θ l'angle d'équilibre ; les forces appliquées sur la sphère A sont :

- son poids : $\vec{P} = mg \vec{i}$,

- la tension du fil : $\vec{T}_A = -T \cos \theta \vec{i} - T \sin \theta \vec{j}$ avec $T = \|\vec{T}_A\|$,

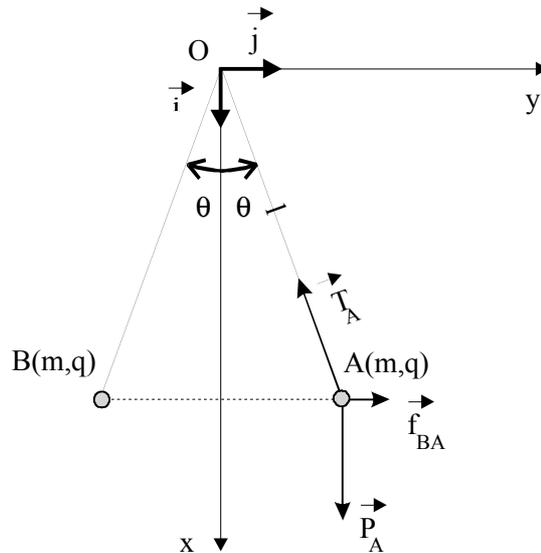
- la force de répulsion exercée par la charge q de la sphère B : $\vec{f}_{BA} = K \frac{q^2}{(2l \sin \theta)^2} \vec{j}$.

A l'équilibre, la résultante de ces 3 forces est nulle ; donc chacune de ses composantes aussi :

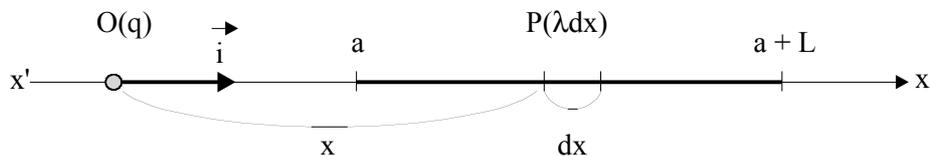
$$mg - T \cos \theta = 0 \quad \text{et} \quad K \frac{q^2}{(2l \sin \theta)^2} - T \sin \theta = 0$$

Alors, en éliminant T , on obtient :

$$m = K \frac{q^2 \cos \theta}{4g l^2 \sin^3 \theta} = 0,0143 \text{ kg}$$



4.(M) Calculer la force électrique s'exerçant sur une charge électrique q située à l'origine O d'un axe $x'Ox$, par une distribution linéaire de charges de densité linéaire uniforme λ , répartie entre les abscisses $a > 0$ et $a + L$.



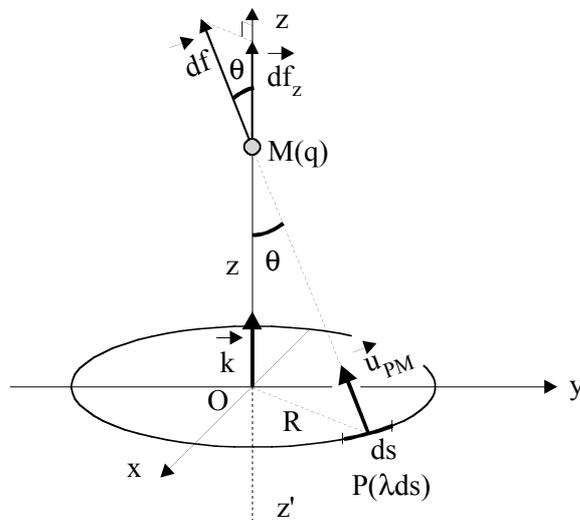
R : La force exercée sur q par l'élément dx portant la charge λdx et situé en P à la distance x de O , est :

$$d\vec{f} = K \frac{q (\lambda dx)}{x^2} (-\vec{i}).$$

La force totale sur q est donc :

$$\vec{f} = -\vec{i} K q \lambda \int_a^{a+L} \frac{dx}{x^2} = +\vec{i} K q \lambda \left[\frac{1}{x} \right]_a^{a+L} = -K q \lambda \frac{L}{a(a+L)} \vec{i}.$$

5.(M) Un cercle de rayon R , centré en O dans le plan xOy , porte une densité linéaire uniforme de charges λ . Quelle est la force exercée par cette distribution sur une charge ponctuelle q située sur l'axe $z'Oz$ orthogonal à ce plan, à la distance z de O ? Discuter suivant la valeur de z .



R : ds en P portant la charge λds , exerce sur q en M la force : $\vec{df} = K \frac{q \lambda ds}{PM^2} \vec{u}_{PM}$.

Le problème présente une symétrie axiale autour de $\vec{z'Oz}$; la force résultante \vec{f} sur q est donc selon $\vec{z'Oz}$ et il suffit de ne considérer que la composante \vec{df}_z de \vec{df} selon cet axe, soit :

$$\vec{df}_z = K \frac{q \lambda ds}{PM^2} \cos\theta \vec{k},$$

On peut donc écrire en remarquant que $PM^2 = R^2 + z^2$ et $\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}$:

$$\vec{f} = \int_{\text{cercle}} \vec{df}_z = K q \lambda \frac{z}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{k} \int_{\text{cercle}} ds = 2\pi R K q \lambda \frac{z}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{k} = f \vec{k}$$

Discussion selon z pour $q\lambda > 0$:

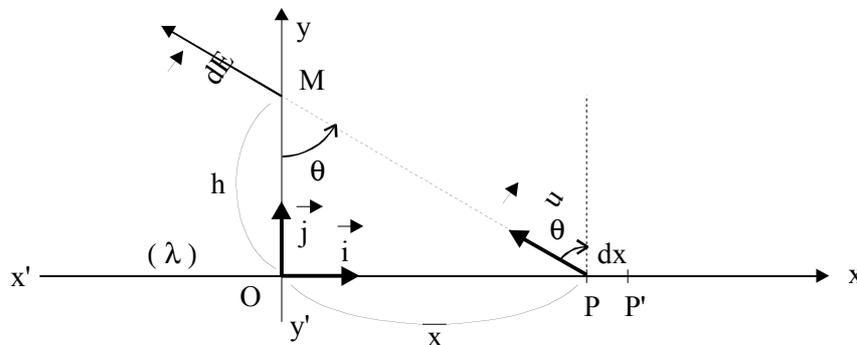
z	$-\infty$	$-R/\sqrt{2}$	0	$+R/\sqrt{2}$	$+\infty$
df/dz	-	0	+	0	-
f	0_-	\swarrow	\searrow	\swarrow	\searrow
		$\min < 0$	0	$\max > 0$	0_+

Champ électrostatique

6.(F) Calculer le champ électrique produit par un électron à une distance de 10 Angström .

R : $\|\vec{E}\| = K \frac{e}{r^2} = 1,44 \cdot 10^9 \text{ V m}^{-1}$

7.(F) Calculer le champ électrique produit en un point situé à une distance h d'un fil rectiligne infini, uniformément chargé de λ par unité de longueur.



R : Supposons les charges réparties selon un axe $\vec{x'Ox}$, avec λdx l'élément linéaire de charge au point P d'abscisse x .

Si $\vec{y'Oy}$ est un axe orthogonal à $\vec{x'Ox}$ en O , et M un point de cet axe à distance h de O , le champ électrique \vec{E} en M est :

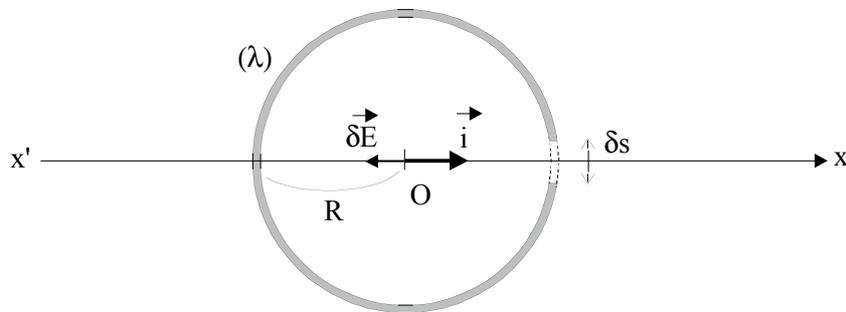
$$\vec{E} = K \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda dx}{PM^2} \vec{u} \quad (1)$$

La répartition de charge présentant, d'une part, une symétrie cylindrique d'axe $\overrightarrow{x'Ox}$ et, donc, une symétrie (miroir) par rapport à tout plan orthogonal à $\overrightarrow{x'Ox}$, le champ \vec{E} créé présente une symétrie cylindrique d'axe $\overrightarrow{x'Ox}$ et est orthogonal à cet axe. Il suffit donc, dans (1), de ne prendre en compte que la composante de \vec{u} selon \vec{j} , soit $\cos\theta \vec{j}$, en posant $\widehat{OMP} = \theta$.

Avec $PM = \frac{h}{\cos\theta}$ et $x = h \tan\theta$, on obtient :

$$\vec{E} = \frac{K \lambda}{h} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos\theta d\theta \vec{j} = 2 \frac{K \lambda}{h} \vec{j} \quad \text{avec} \quad K = \frac{1}{4\pi \epsilon_0}$$

8.(M) Un fil isolant est courbé suivant un cercle de rayon $R = 50 \text{ cm}$ et de centre O . Entre les extrémités du fil subsiste un espace de 2 mm assimilable à un élément infinitésimal de longueur. Une charge électrique de 10^{-9} C est répartie uniformément sur la longueur du fil. Calculer le champ électrique créé en O par ce fil.



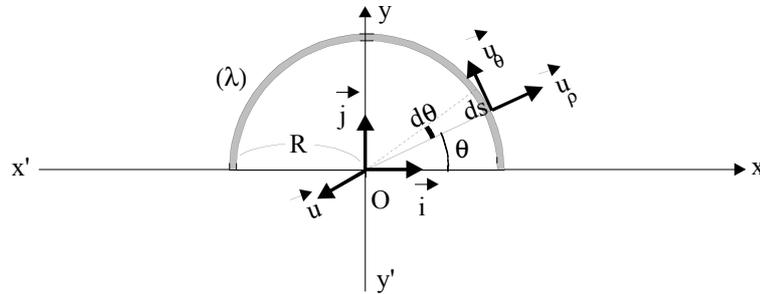
R : Si on ferme le cercle en comblant l'espace de 2 mm par un élément δs chargé avec la même densité λ , on obtient une symétrie de charge qui produit en O un champ nul. En notant alors \vec{E} le champ en O dû au cercle ouvert, et $\vec{\delta E}$ celui dû à l'élément ajouté chargé de $\lambda \delta s$, on doit avoir :

$$\vec{E} + \vec{\delta E} = \vec{0} \quad \text{soit} \quad \vec{E} = -\vec{\delta E}$$

$$\text{D'où} \quad \vec{\delta E} = K \frac{\lambda \delta s}{R^2} (-\vec{i}) \Rightarrow \vec{E} = K \frac{\lambda \delta s}{R^2} \vec{i} \quad \text{et} \quad \|\vec{E}\| = 0,023 \text{ V m}^{-1}$$

en admettant que $\lambda = 10^{-9} \text{ C} / (2\pi R - \delta s) \cong 10^{-9} \text{ C} / 2\pi R$.

9.(M) Un demi cercle de centre O et de rayon R porte une charge électrique uniformément répartie de densité linéaire λ . Calculer le champ électrique créé en O .



R : Le champ en O s'écrit :

$$\vec{E} = K \int_{1/2 \text{ cercle}} \frac{\lambda ds}{R^2} \vec{u},$$

ds étant un élément d'arc du demi-cercle et \vec{u} le vecteur unitaire en O qui fuit ds .

Pour calculer \vec{E} , il est commode de choisir comme variable la coordonnée polaire θ de ds . Dans ce cas, on a $ds = R d\theta$ et $\vec{u} = -\cos\theta \vec{i} - \sin\theta \vec{j}$. Mais, comme \vec{E} est nécessairement selon $\overrightarrow{y'Oy}$, seule la composante de \vec{u} selon \vec{j} est à considérer :

$$\vec{E} = K \int_{1/2 \text{ cercle}} \frac{\lambda R d\theta}{R^2} (-\sin\theta \vec{j}) = -2K \frac{\lambda}{R} \vec{j}$$

10.(D) Une demi sphère de centre O et de rayon R , porte une charge surfacique uniforme de densité σ . Calculer le champ électrique créé en O par cette distribution.

R : Le champ en O s'écrit :

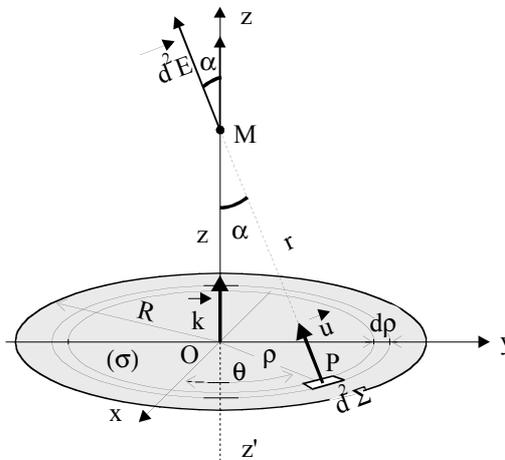
$$\vec{E} = K \iint_{1/2 \text{ sphère}} \frac{\sigma d^2\Sigma}{R^2} \vec{u},$$

$d^2\Sigma$ étant un élément de surface de la demi-sphère et \vec{u} le vecteur unitaire en O qui fuit $d^2\Sigma$.

Pour calculer \vec{E} , il est commode de choisir comme variables les coordonnées sphériques θ et φ de $d^2\Sigma$. Dans ce cas, il faut remplacer $d^2\Sigma$ par $R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$ et \vec{u} par sa seule composante selon $\overrightarrow{z'Oz}$, soit $-\cos\theta \vec{k}$, puisque, en raison de la symétrie de répartition des charges, \vec{E} est nécessairement selon cet axe.

$$\vec{E} = K \iint_{1/2 \text{ sphère}} \frac{\sigma R^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{R^2} (-\cos \theta \vec{k}) = -\pi K \sigma \vec{k}$$

11.(D) Un disque de rayon R est centré en O dans le plan $[xOy]$. Il porte une densité superficielle de charge uniforme σ . Calculer le champ électrique $\vec{E}(z)$ résultant en tout point $z > 0$ de son axe $z'Oz$. Que devient $\vec{E}(z)$ lorsque $R \rightarrow \infty$?



R : Le disque ayant une symétrie axiale d'axe $\vec{z}'z'$, le champ en M de cote z peut s'écrire $\vec{E}(z) = E(z)\vec{k}$. Un élément de surface $d^2\Sigma$ en un point $P(\rho, \theta)$ du disque, produit alors en M à distance r , le champ élémentaire $d^2\vec{E} = K \frac{\sigma d^2\Sigma}{r^2} \vec{u}$, dont seule la composante selon $\vec{z}'z'$ est à prendre en considération. Le vecteur \vec{u} étant l'unitaire qui pointe vers M depuis P faisant l'angle α avec $\vec{z}'z'$, le champ résultant est :

$$E(z)\vec{k} = K \sigma \vec{k} \iint_{\text{disque}} \frac{d^2\Sigma}{r^2} \cos \alpha$$

Il est commode de prendre (ρ, θ) pour variables d'intégration. Alors, comme $d^2\Sigma = \rho d\rho d\theta$, $\cos \alpha = z/r$ et $r = (\rho^2 + z^2)^{1/2}$, la relation précédente donne :

$$E(z) = K \sigma z \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{\rho=0}^R \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = 2\pi K \sigma \left[\frac{z}{\sqrt{z^2}} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right]$$

Remarques :

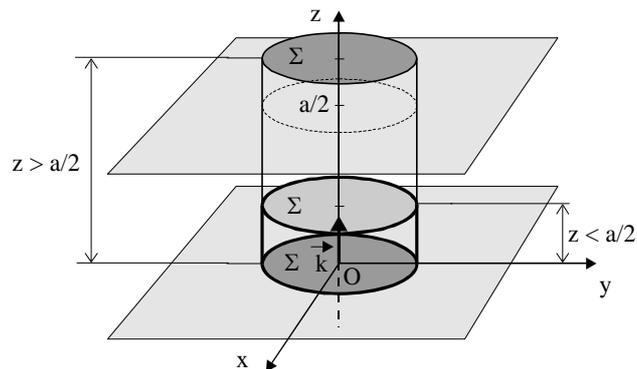
1/ Le rapport $z/\sqrt{z^2}$ vaut $+1$ ou -1 , selon que $z > 0$ ou $z < 0$.

2/ Comme $K = \frac{1}{4\pi \epsilon_0}$, si $R \rightarrow \infty$: $\vec{E}(z) \rightarrow \frac{+\sigma}{2\epsilon_0} \vec{k}$ ou $\frac{-\sigma}{2\epsilon_0} \vec{k}$ (selon que $z > 0$ ou $z < 0$),

qui sont les valeurs du champ créé par une répartition plane, uniforme et infinie de charges dans le vide.

Potentiel électrostatique et théorème de Gauss

12.(D) On considère dans un repère $(Oxyz)$, une distribution de charges électriques de densité volumique uniforme ρ , répartie entre deux plans infinis parallèles au plan $[xOy]$ et situés respectivement aux cotes $z = -a/2$ et $z = +a/2$. En utilisant le théorème de Gauss, calculer le champ et le potentiel électriques en tout point ; on prendra le potentiel nul dans le plan $[xOy]$. Représenter graphiquement les variations de ces deux grandeurs.



R : De l'analyse de la symétrie de la répartition des charges, il résulte que $\vec{E} = E(z)\vec{k}$ avec une symétrie miroir par rapport au plan $[xOy]$ et qu'en conséquence :

- . dans le plan $[xOy]$, $E(z) = 0$ (puisque \vec{E} doit y être à la fois orthogonal et confondu),
- . il suffit d'étudier $E(z)$ pour $z > 0$ (ou $z < 0$).

Surface de Gauss (S) : un tronç de cylindre de longueur z , dont l'axe est orthogonal au plan $[xOy]$, et fermé par deux surfaces circulaires Σ parallèles au plan $[xOy]$, de cotes respectives $z = 0$ et $z > 0$.

1/ Envisageons le cas où la longueur de (S) est $z \leq +a/2$.

$$\Phi = \iint_{\Sigma \hat{a} z} \vec{E} \cdot \vec{N} d^2S = E(z) \times \iint_{\Sigma \hat{a} z} d^2S = E(z) \times \Sigma = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

avec $Q_{\text{int}} = \rho \times \Sigma \times z$ (pour $\rho > 0$ ou $\rho < 0$). D'où il vient que $E(z) = \frac{\rho z}{\epsilon_0}$. On a donc, pour tout

$$0 \leq z \leq +a/2 : \vec{E} = \frac{\rho z}{\epsilon_0} \vec{k},$$

et comme Σ est aussi grand que l'on veut, \vec{E} est bien le champ créé, à la cote z , par toute la charge.

Du fait de la symétrie miroir par rapport au plan $[xOy]$, on voit immédiatement que cette relation est aussi utilisable pour tout $-a/2 \leq z \leq 0$.

Le potentiel :

on a pour tout $-a/2 \leq z \leq +a/2$:

$$dV = -\frac{\rho z}{\epsilon_0} \vec{k} \cdot (dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}) = -\frac{\rho z}{\epsilon_0} dz \Rightarrow V = -\frac{\rho z^2}{2\epsilon_0} + V_o$$

avec la constante arbitraire $V_o = 0$ puisque le potentiel est nul pour $z = 0$ par hypothèse.

Notons qu'aux limites $z = \pm a/2$, on a $V = -\frac{\rho a^2}{8\epsilon_0}$.

2/ Etudions, maintenant, le cas où la longueur z de (S) est $z \geq +a/2$. Seule change la charge Q_{int}

qui prend alors sa valeur maximum $\rho \times \Sigma \times \frac{a}{2}$; pour $\rho > 0$ ou $\rho < 0$ le champ (assimilable à celui

créé par toute la charge) est donc :

$$\vec{E} = \frac{\rho a}{2\epsilon_0} \vec{k}$$

Dans cette gamme de valeurs de z , on a, alors : $dV = -\frac{\rho a}{2\epsilon_0} dz \Rightarrow V = -\frac{\rho a}{2\epsilon_0} z + V_o$

Or, comme $V = -\frac{\rho a^2}{8\epsilon_0}$ en $z = +a/2$, la constante arbitraire est $V_o = -\frac{\rho a^2}{8\epsilon_0} + \frac{\rho a^2}{4\epsilon_0} = +\frac{\rho a^2}{8\epsilon_0}$

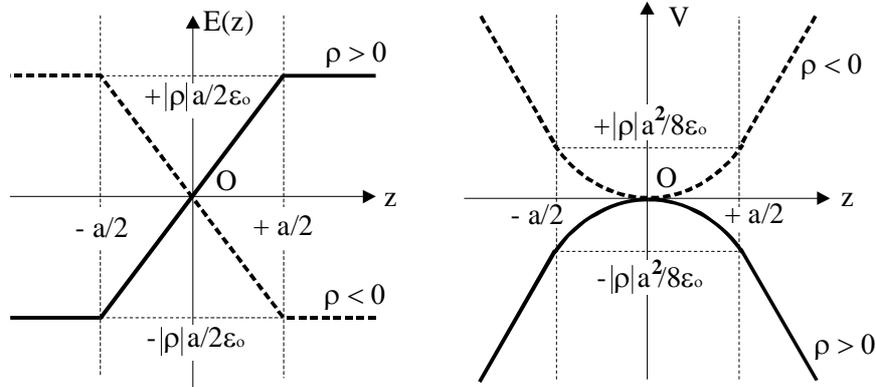
$$\Rightarrow V = -\frac{\rho a}{2\epsilon_0} z + \frac{\rho a^2}{8\epsilon_0}$$

En raison de la symétrie miroir par rapport au plan $[xOy]$, le champ électrique doit s'écrire pour tout

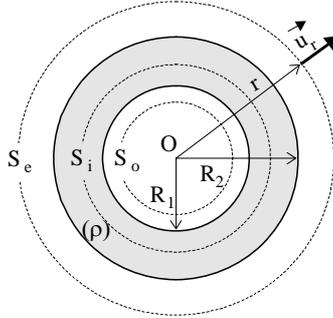
$z \leq -a/2$: $\vec{E} = -\frac{\rho a}{2\epsilon_0} \vec{k}$ d'où, il résulte que $dV = +\frac{\rho a}{2\epsilon_0} dz \Rightarrow V = \frac{\rho a}{2\epsilon_0} z + V_o$

Or, $V = -\frac{\rho a^2}{8\epsilon_0}$ en $z = -a/2$; la constante arbitraire est donc $V_o = -\frac{\rho a^2}{8\epsilon_0} + \frac{\rho a^2}{4\epsilon_0} = +\frac{\rho a^2}{8\epsilon_0}$

$$\Rightarrow V = \frac{\rho a}{2\epsilon_0} z + \frac{\rho a^2}{8\epsilon_0}$$



13.(M) Une distribution de charges électriques de densité volumique uniforme ρ , est répartie entre deux sphères concentriques de centre O et de rayons R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$). Calculer le champ et le potentiel électriques en tout point, à l'aide du théorème de Gauss. On admettra que le potentiel est nul à l'infini. Représenter graphiquement les variations de ces deux grandeurs en fonction de la distance à O .



R : Prenons O comme origine d'un repère $(Oxyz)$ muni des coordonnées sphériques (r, θ, φ) .

En raison de la symétrie sphérique de centre O de la distribution, le champ produit est radial et ne dépend que de sa distance r à O ; on a donc $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$,

et $dV = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{MM'} = -E(r)dr$ car $\overrightarrow{MM'} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + r \sin\theta d\varphi\vec{u}_\varphi$.

Surfaces de Gauss : des sphères de centre O .

1/ Etude pour $R_2 \leq r$.

$$Q_{\text{int}} = \rho 4\pi (R_2^3 - R_1^3)/3 \text{ avec flux sortant : } \Phi = \iint_{S_e} \vec{E} \cdot \vec{u}_r d^2S = E(r) \iint_{S_e} d^2S = E(r) 4\pi r^2 .$$

$$\text{d'où } \vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0 r^2} (R_2^3 - R_1^3) \vec{u}_r$$

$$\text{et } dV = -\frac{\rho}{3\epsilon_0 r^2} (R_2^3 - R_1^3) dr \Rightarrow V = +\frac{\rho}{3\epsilon_0 r} (R_2^3 - R_1^3) + V_e$$

avec V_e constante arbitraire nulle, puisque $V \rightarrow 0$ lorsque $r \rightarrow \infty$, par hypothèse.

$$\text{Rq : pour } r = R_2, \text{ le potentiel vaut } \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(R_2^2 - \frac{R_1^3}{R_2} \right).$$

2/ Etude pour $R_1 \leq r \leq R_2$.

Surface de Gauss : la surface sphérique $S_i(O, r)$, équivalant à faire jouer à r un rôle analogue à celui joué par R_2 dans l'étude précédente, d'où :

$$E(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0 r^2} (r^3 - R_1^3) \Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(r - \frac{R_1^3}{r^2} \right) \vec{u}_r$$

$$\text{et donc : } dV = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(r - \frac{R_1^3}{r^2} \right) dr \Rightarrow V = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{r^2}{2} + \frac{R_1^3}{r} \right) + V_i$$

avec V_i constante arbitraire telle que $-\frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{R_2^2}{2} + \frac{R_1^3}{R_2} \right) + V_i = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(R_2^2 - \frac{R_1^3}{R_2} \right)$, d'après la valeur

du potentiel obtenue pour $r = R_2$ dans l'étude précédente. Il s'ensuit que :

$$V = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{r^2}{2} + \frac{R_1^3}{r} - \frac{3R_2^2}{2} \right).$$

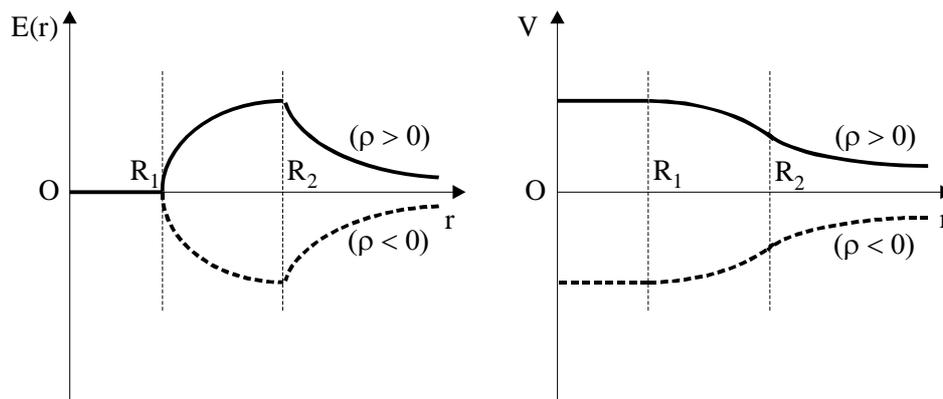
Rq : pour $r = R_1$, le potentiel vaut $-\frac{\rho}{2\epsilon_0} (R_1^2 - R_2^2)$.

3/ Etude pour $r \leq R_1$.

Le flux à travers la *surface sphérique* $S_o(O, r)$ est nul puisque cette surface ne contient pas de charges.

$E(r)$ est donc nul lui aussi ; ce qui entraîne que le potentiel soit constant et nécessairement égal à la

valeur qu'il possède à la limite $r = R_1$, soit tel que, d'après l'étude précédente : $V = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} (R_1^2 - R_2^2)$.



14.(M) Au voisinage immédiat de la surface de la Terre supposée sphérique, on relève un champ électrique vertical et dirigé vers le bas, de module 100 V m^{-1} .

- A quelle densité uniforme de charge superficielle σ ce champ correspond-il ? Quelle est la charge totale Q portée par la Terre, sachant que son rayon est $R = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$?

- Lorsqu'on s'élève dans l'atmosphère, le champ électrique conserve les mêmes direction et sens qu'au sol, mais son module $|\vec{E}|$ varie en fonction de l'altitude z (en mètres), comme : $|\vec{E}| = E_o \exp(-768 z / R)$ avec $E_o = 113.1 \text{ V m}^{-1}$. Calculer la différence de potentiel entre un point d'altitude $z = 5 \text{ km}$ et le sol.

R : - Soit T le centre de la Terre. La densité de charge de surface étant uniforme, la charge présente une symétrie sphérique de centre T . Il s'ensuit que le champ \vec{E} produit est radial et que sa norme, $\|\vec{E}\|$, est la même en tout point de la surface terrestre. Prenons pour surface de Gauss la sphère $S(T, R)$ confondue avec la surface de la Terre ; si \vec{N} est son vecteur unitaire sortant, \vec{E} qui est dirigé vers le bas, peut s'écrire $\vec{E} = -\|\vec{E}\| \vec{N}$. Le flux sortant de $S(T, R)$ est alors :

$$\iint_S -\|\vec{E}\| \vec{N} \cdot \vec{N} d^2S = -\|\vec{E}\| 4\pi R^2,$$

et la charge intérieure valant $\sigma 4\pi R^2$, le théorème de Gauss donne :

$$\|\vec{E}\| = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (\sigma \text{ est donc } < 0) \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{N}.$$

A.N. : On trouve : $\sigma = -\epsilon_0 \|\vec{E}\| = -0,884 \cdot 10^{-9} \text{ C m}^{-2}$ et donc $Q = \sigma 4\pi R^2 = -4,5110^5 \text{ C}$.

- Soit O un point de la surface terrestre, et \vec{Oz} l'axe vertical montant (de vecteur unitaire \vec{k}) d'un repère $(Oxyz)$. A l'altitude z , le champ qui est dirigé vers le bas, ne varie pas comme $(R/R+z)^2$, mais s'écrit $\vec{E} = -\|\vec{E}\| \vec{k} = -E_0 \exp(-768 z/R) \vec{k}$ (à cause de charges présentes dans l'atmosphère).

On a donc : $dV = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{MM'} = -\vec{E} \cdot (dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}) = +E_0 \exp(-768 z/R) dz$

d'où : $\int_0^z dV = V(z) - V(0) = +E_0 \int_0^z \exp\left(-\frac{768}{R} z\right) dz = -\frac{E_0 R}{768} \left[\exp\left(-\frac{768}{R} z\right) \right]_0^z$

et l'on a : $V(z) - V(0) = +\frac{E_0 R}{768} \left[1 - \exp\left(-\frac{768}{R} z\right) \right] = 425 \text{ 000 V}$

15.(M) On admet que l'atome d'hydrogène puisse être assimilé à proton ponctuel, avec un électron non localisé dont la charge électrique $-e$ est répartie en volume selon une symétrie sphérique centrée sur le proton. Le potentiel créé par l'atome à la distance r du proton est de la forme :

$$V(r) = \frac{e}{4\pi \epsilon_0 r} \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$

Avec $a = 0,5 \text{ \AA}$. Calculer le module $|\vec{E}|$ du champ électrique créé par l'atome à la distance r et trouver sa valeur pour $r = a$. En appliquant le théorème de Gauss, vérifier que ce système de charges comporte bien une charge $+e$ en son centre, et que sa charge totale est nulle. Déterminer la charge $q(r)$ contenue dans une sphère de rayon r , centrée sur le proton. En déduire la grandeur $c(r) = dq(r)/dr$ dont on tracera les variations en fonction de r .

R : - Assimilons le proton à un point O origine d'un repère $(Oxyz)$ muni des coordonnées sphériques (r, θ, φ) . En raison de la symétrie sphérique de centre O de la distribution de charge, le champ produit est radial et ne dépend que de sa distance r à O ; on a donc $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$.

Le potentiel est tel que : $dV = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{MM'} = -E(r)dr \Rightarrow E(r) = -\frac{dV}{dr}$ car

$$\overrightarrow{MM'} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi$$

$$\text{soit : } E(r) = -K e \left[-\frac{1}{r^2} \exp\left(-\frac{r}{a}\right) - \frac{1}{ra} \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \right] = \frac{K e}{r^2} \left(1 + \frac{r}{a} \right) \exp\left(-\frac{r}{a}\right) > 0$$

$$\text{d'où : } \|\vec{E}(r)\| = E(r) \quad \text{et} \quad \|\vec{E}(a)\| = E(a) = 4,24 \cdot 10^{11} \text{ V m}^{-1}$$

- Flux Φ sortant de la surface sphérique $S(O, r)$ de rayon r et centre O : comme $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$, avec $E(r) > 0$, en tout point de $S(O, r)$ le champ est sortant et de même module. On a donc

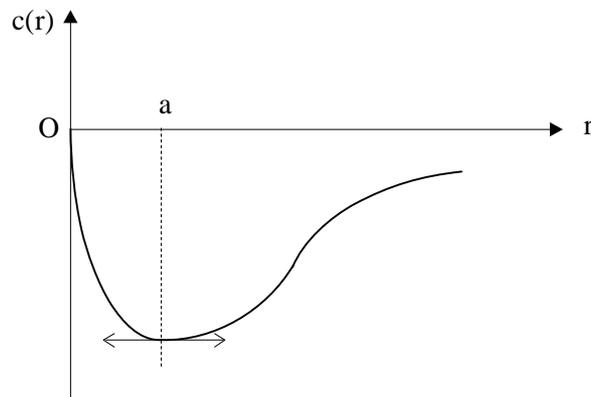
$$\Phi = 4\pi r^2 E(r), \text{ soit : } \Phi = \frac{e}{\epsilon_0} \left(1 + \frac{r}{a} \right) \exp\left(-\frac{r}{a}\right).$$

Alors, si $r \rightarrow 0$, $\Phi \rightarrow \frac{e}{\epsilon_0}$ ce qui montre que $S(O, r)$ ne contient plus que la charge $+e$ du proton central ; et si $r \rightarrow \infty$, $\Phi \rightarrow 0$: la charge dans $S(O, r)$ est nulle parce qu'en plus du proton, elle contient en totalité $-e$.

$$\text{- On a : } \Phi = \frac{q(r)}{\epsilon_0} \Rightarrow q(r) = e \left(1 + \frac{r}{a} \right) \exp\left(-\frac{r}{a}\right).$$

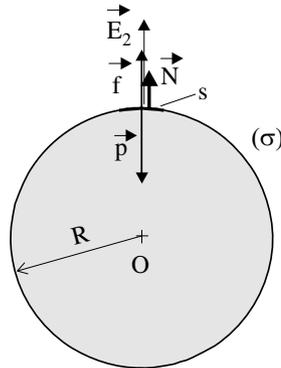
$$\text{Par conséquent : } c(r) = \frac{dq(r)}{dr} = -\frac{e r}{a^2} \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \text{ et la dérivée } \frac{dc(r)}{dr} = -\frac{e}{a^2} \left(1 - \frac{r}{a} \right) \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$

étant du signe de $(r - a)$, les variations de $c(r)$ (qui peut se définir comme une sorte de « densité radiale » de charge autour de O , puisque $dq(r)$ est la charge comprise entre les sphères de rayons r et $r + dr$) peuvent être représentées comme ci-dessous :



Forces électrostatiques dans les systèmes de conducteurs

16.(M) Un très petit disque métallique de masse $m = 75 \text{ mg}$ et de surface $s = 75 \text{ mm}^2$, est posé sur un sphère conductrice de rayon $R = 50 \text{ cm}$. On élève progressivement le potentiel V de la sphère. Pour quelle valeur de V le disque commence-t-il à se soulever (on assimilera le disque à une calotte sphérique d'épaisseur négligeable et de même rayon que la sphère) ?



R : En élevant le potentiel du *conducteur unique* que forment, par contact, la sphère et le disque posé sur elle, on augmente les charges non compensées - et de même signe - qu'ils portent l'un et l'autre. Les forces de répulsion que subissent, par propriété, les charges du disque de la part des charges du reste de la sphère, commencent à soulever le disque dès l'instant où elles deviennent, en norme, égales à son poids. Maintenant, pour modéliser simplement le phénomène, il est commode de considérer le disque, du point de vue de la répartition des charges, comme se substituant totalement à l'élément de surface de sphère qu'il recouvre. En reprenant alors le raisonnement qui explique la « pression électrostatique », on peut admettre que le champ auquel sont soumises les charges du disque, est celui dû aux charges que porte le

reste de la surface de la sphère, soit : $\vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{N}$, \vec{N} étant un unitaire normal sortant de la sphère.

Le disque (supposé très petit) subit donc la force électrostatique : $\vec{f} = \sigma s \vec{E}_2 = \frac{s \sigma^2}{2\epsilon_0} \vec{N}$ qui s'oppose à

son poids $\vec{p} = -m g \vec{N}$.

Le potentiel au centre de la sphère (ainsi qu'en tout autre de ses points puisqu'il s'agit d'un conducteur)

s'écrit, s'il est pris nul à l' ∞ : $V = K \iint_{\text{sphère}} \frac{\sigma d^2S}{R} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{\sigma 4\pi R^2}{R}$; d'où il vient que : $\sigma = \frac{V \epsilon_0}{R}$

et que $\vec{f} = \frac{s \epsilon_0 V^2}{2R^2} \vec{N}$

Le disque pouvant se soulever dès que $\vec{f} + \vec{p} = \vec{0}$, le potentiel qui permet d'atteindre ce seuil est tel

que : $\frac{s \epsilon_0 V^2}{2R^2} \vec{N} - m g \vec{N} = 0$ d'où $V = R \sqrt{\frac{2m g}{\epsilon_0 s}} = 745 \text{ 000 V}$.

17.(M) Une sphère métallique pleine de centre O et de rayon $R = 5 \text{ cm}$ est portée au potentiel $V = 50 \text{ kV}$.

- Calculer la pression électrostatique à la surface de ce conducteur.

- Calculer la résultante des forces s'exerçant sur une calotte sphérique de rayon de base $r = R \sin \alpha$. AN : $\alpha = 45^\circ$.

- La sphère métallique est constituée de deux hémisphères accolés au niveau de son plan équatorial horizontal. L'hémisphère inférieur est fixe, et le supérieur est libre de se déplacer. Pour quelle valeur du potentiel V , l'hémisphère supérieur se détachera-t-il de l'inférieur, sachant que la masse volumique du matériau de la sphère est $\mu = 2,7 \text{ g cm}^{-3}$?

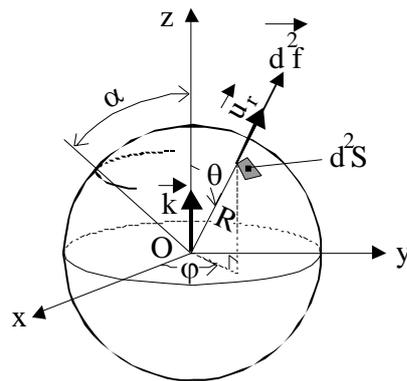
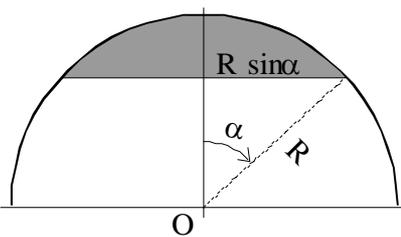
R : - La pression électrostatique s'écrit $P = \sigma^2 / 2\epsilon_0$. Or, dans l'exercice N° 16, on a montré qu'une sphère soumise au potentiel V portait la densité de charge $\sigma = V \epsilon_0 / R$. Par conséquent :

$$\text{A.N. : } P = \frac{\epsilon_0 V^2}{2R^2} = 4,42 \text{ Pa} .$$

- Soit $(Oxyz)$ un repère attaché au centre O de la sphère, muni des coordonnées sphériques (r, θ, φ) où un élément de surface sphérique s'écrit $d^2S = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$.

Soit $\vec{d^2f}$ la force électrostatique sur un élément de surface d^2S de la sphère. Etant nécessairement répulsive, cette force est dirigée vers l'extérieur ; de plus, en raison de la symétrie sphérique, elle est radiale ; ce qui permet d'écrire en utilisant l'expression précédemment obtenue pour la pression :

$$\vec{d^2f} = \left\| \vec{d^2f} \right\| = P d^2S \vec{u}_r = \frac{\epsilon_0 V^2}{2} \sin \theta d\theta d\varphi \vec{u}_r,$$



La résultante \vec{f} des forces $\vec{d^2f}$ qui s'exercent en chaque point de la calotte, est alors telle que :

$$\vec{f} = \iint_{\text{calotte}} \vec{d^2f} .$$

Du fait de la symétrie axiale de la calotte autour de \vec{Oz} , de vecteur unitaire \vec{k} , cet axe est le support de \vec{f} . L'intégration peut donc se faire sur les seules projections $\left\| \vec{d^2 f} \right\| \cos \theta \vec{k}$ de $\vec{d^2 f}$ selon \vec{Oz} , ce

qui permet d'écrire:
$$\vec{f} = \vec{k} \iint_{calotte} \left\| \vec{d^2 f} \right\| \cos \theta = \vec{k} \frac{\epsilon_0 V^2}{2} \iint_{calotte} \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi,$$

soit:
$$\vec{f} = \vec{k} \frac{\epsilon_0 V^2}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\alpha \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{1}{2} \pi \epsilon_0 V^2 \sin^2 \alpha \vec{k}.$$

A.N.: $\left\| \vec{f} \right\| = 0,0174 N.$

- L'hémisphère supérieur soumis à son poids \vec{p} dirigé vers le bas et à la force électrostatique \vec{f} dirigée vers le haut, se détachera à partir du moment où l'on aura $\left\| \vec{p} \right\| = \left\| \vec{f} \right\|.$

Or $\left\| \vec{f} \right\| = \frac{1}{2} \pi \epsilon_0 V^2$, car pour un hémisphère $\alpha = \pi/2$, et $\left\| \vec{p} \right\| = m g = \mu \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi R^3 g.$

La valeur du potentiel à partir de laquelle, l'hémisphère supérieur se détachera de l'inférieur, est donc

telle que:
$$\frac{1}{2} \pi \epsilon_0 V^2 = \mu \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi R^3 g \quad \text{soit} \quad V = \sqrt{\frac{4R^3 \mu g}{3\epsilon_0}} = 707\,000 V.$$

18.(M) Deux sphères conductrices de centres A et B , et de même rayon R , sont suspendues par des fils isolants longs et fins à un même point O ; on a $OA = OB = a$ et R est supposé petit devant a . Chaque sphère a une masse m . Lorsque les sphères sont portées au même potentiel V , on observe un angle 2α entre OA et OB . Calculer ce potentiel V pour: $\alpha = 30^\circ$, $R = 0,9 \text{ cm}$, $a = 18 \text{ cm}$, $m = 0,5 \text{ g}$.

R: Les deux sphères étant identiques et se trouvant au même potentiel V , elles doivent, compte tenu de la symétrie du dispositif, porter chacune la même charge Q .

On suppose que R est assez petit devant la distance $AB = d = 2a \sin \alpha$ des sphères pour que chacune puisse voir l'autre comme un point (remarquons qu'en raison des influences mutuelles, les densités surfaciques de charges des sphères ne sont pas uniformes).

Les sphères étant conductrices, leur potentiel est uniforme; il est égal, par exemple, à celui du centre B de la sphère (B), qui est dû à la charge Q à sa surface, ainsi qu'à la charge Q sur la sphère (A) vue

par (B) comme un point à distance d . On a donc:
$$V = K \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i} = K \left[\frac{Q}{R} + \frac{Q}{d} \right]$$

Soit, un repère cartésien (Oxy) dont l'axe \vec{Oy} est vertical montant. A l'équilibre, la somme géométrique des forces appliquées en B , est nulle. Il s'agit de la force électrostatique \vec{f}_{AB} exercée par

la charge Q de (A) sur la charge Q de (B) (charges réciproquement vues comme ponctuelles), de la tension \vec{T}_B de module T du fil de suspension de (B), et du poids \vec{P}_B de (B). Décomposées selon les deux axes de (Oxy) , ces trois forces s'écrivent :

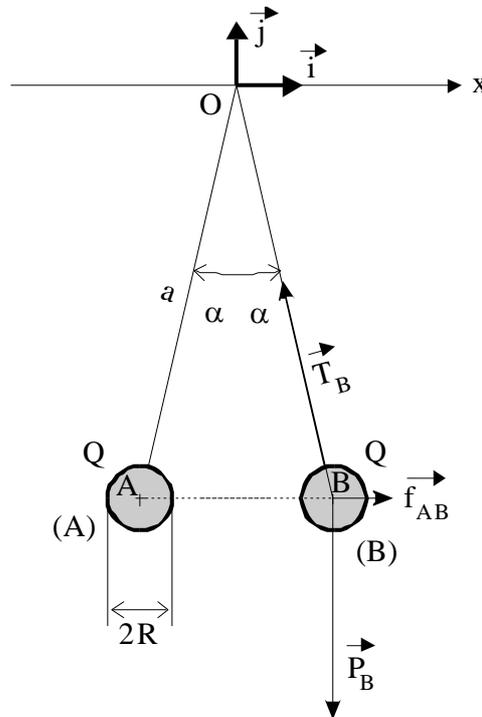
$$\vec{f}_{AB} = K \frac{Q^2}{d^2} \vec{i}, \quad \vec{T}_B = -T \sin \alpha \vec{i} + T \cos \alpha \vec{j}, \quad \vec{P}_B = -m g \vec{j},$$

et l'égalité : $\vec{f}_{AB} + \vec{T}_B + \vec{P}_B = \vec{0}$ permet d'écrire, d'une part : $K \frac{Q^2}{d^2} \vec{i} - T \sin \alpha \vec{i} = \vec{0}$, et, d'autre

part : $T \cos \alpha \vec{j} - m g \vec{j} = \vec{0}$, soit, en éliminant T : $K \frac{Q^2}{d^2 m g} = \tan \alpha$, d'où $Q = d \sqrt{\frac{1}{K} m g \tan \alpha}$

.Ainsi, le potentiel peut-il être reformulé comme : $V = \left(1 + \frac{d}{R}\right) \sqrt{K m g \tan \alpha}$ avec $d = 2a \sin \alpha$;

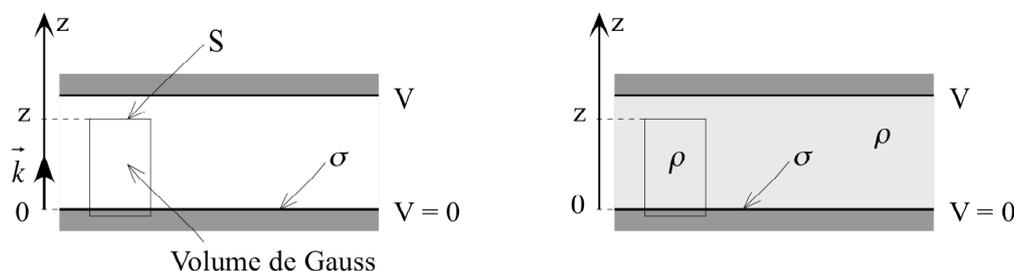
A.N. : $V = 106\,000\text{ V}$



Résultats et corrections des exercices sur les Condensateurs

(seuls les exercices qui n'ont pas été traités en TD sont intégralement corrigés ci-dessous. Pour les autres, on rappelle simplement les principaux résultats).

19.(F) On applique le Théorème de Gauss à un volume dont la face inférieure S est située dans l'une des armature du condensateur (champ \vec{E} nul), dont les côtés sont perpendiculaires aux armatures (produit scalaire $\vec{E} \cdot d^2 \Sigma$ nul) et dont la face supérieure S est située à la hauteur z. En raison de la symétrie du système, le champ est perpendiculaire aux armatures, et son flux se réduit au produit des modules sur la surface S : $\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{N}_S d^2 \Sigma = ES = \sigma S / \epsilon_0$ d'où le champ : $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{k}$ qui ne dépend pas de z.



Le potentiel se déduit de $dV = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{MM'} = -\vec{E} \cdot d\vec{z}$ soit $V(z) = \int E dz = \frac{\sigma z}{\epsilon_0} + V_0$ où V_0 est une constante d'intégration. Avec les conditions $V(z=0) = 0$ et $V(z=e) = V$ on en déduit $V_0 = 0$ et $V(z) = \frac{\sigma z}{\epsilon_0} = V \frac{z}{e}$ (le potentiel croît linéairement de 0 en $z=0$ à V en $z=e$).

Avec, en plus, une densité de charges ρ uniforme entre les armatures, les raisonnements sont les mêmes et on obtient $\vec{E} = \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0} + \frac{\rho z}{\epsilon_0} \right) \vec{k}$ et $V(z) = \frac{\sigma z}{\epsilon_0} + \frac{\rho z^2}{2\epsilon_0}$ avec toujours $V(z=e) = V$.

20.(M) Energie finale du condensateur : $W_C = CV^2 / 2$.

Energie cédée au circuit par le générateur : $P_G = V i$ ou encore $dW_G = V dq$ soit :

$$W_G = \int_{q=0}^Q dW_G = V \int_{q=0}^Q dq = V Q = CV^2 .$$

Le rendement $\eta = W_C / W_G$ est de $1/2$.

N° d'ordre de l'opération	Tension du géné.	Charge de C en fin d'opé.	Charge reçue par C au cours de l'opé.	Energie dépensée par le géné dans l'opé.
1	$\frac{V}{2}$	$Q_1 = \frac{CV}{2}$	$Q_1 = \frac{CV}{2}$	$W_1 = \frac{CV}{2} \frac{V}{2} = \frac{CV^2}{4}$
2	V	$Q_2 = CV$	$Q_2 - Q_1 = \frac{CV}{2}$	$W_2 = \frac{CV}{2} V = \frac{CV^2}{2}$

- Cas des n générateurs :

N° d'ordre de l'opération	Tension du géné.	Charge de C en fin d'opé.	Charge reçue par C au cours de l'opé.	Energie dépensée par le géné dans l'opé.
1	$\frac{V}{n}$	$Q_1 = \frac{CV}{n}$	$Q_1 = \frac{CV}{n}$	$W_1 = \frac{CV}{n} \frac{V}{n} = \frac{CV^2}{n^2}$
2	$\frac{2V}{n}$	$Q_2 = \frac{2CV}{n}$	$Q_2 - Q_1 = \frac{CV}{n}$	$W_2 = \frac{CV}{n} \frac{2V}{n} = \frac{2CV^2}{n^2}$
.....				
n	V	$Q = CV$	$Q - Q_{n-1} = \frac{CV}{n}$	$W_n = \frac{CV}{n} V = \frac{CV^2}{n}$

Energie finale du condensateur : $W_C = CV^2/2$.

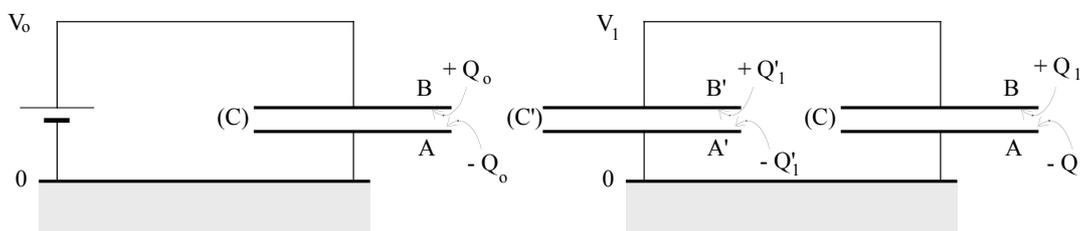
Energie dépensée par le générateur : $W_G = \frac{CV^2}{n^2} (1 + 2 + \dots + n) = \frac{CV^2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2}$.

Rendement : $\eta = \frac{W_C}{W_G} = \frac{n}{n+1}$ qui tend vers 1 si n tend vers l'infini.

21.(F) $Q_o = CV_o = 8,0 \cdot 10^{-2} C$, et l'énergie $W_o = CV_o^2/2 = 1600 J$.

- Conservation de la charge : $Q_1 + Q'_1 = Q_o$, soit $CV_1 + C'V_1 = CV_o$.

D'où : $V_1 = \frac{C}{C+C'} V_o = 8000 V$.



et $Q_1 = CV_1 = \frac{C^2}{C+C'} V_o = 1,6 \cdot 10^{-2} C$ et $Q'_1 = C'V_1 = \frac{C'C}{C+C'} V_o = 6,4 \cdot 10^{-2} C$.

Energies emmagasinées : $W_1 + W'_1 = \frac{1}{2} (C + C') V_1^2 = \frac{1}{2} \frac{C^2}{C+C'} V_o^2 = 320 J$,

Energie perdue : $W_o - (W_1 + W'_1) = 1280 J$

22.(M) Soit \vec{Ox} un axe vertical dirigé vers le bas, de vecteur unitaire \vec{i} ; son origine O est choisie à la limite supérieure de la zone commune non perturbée par les effets de bord, de sorte que l'abscisse x de sa limite inférieure puisse en représenter la hauteur. Admettre, alors, qu'une « variation de l'enfoncement produit une variation égale de x », revient à dire que O doit être considéré fixe par rapport à A_2 .

La force électrostatique \vec{f} que A_2 exerce sur A_1 est attractive puisque les charges portées par les deux cylindres sont opposées; par conséquent, dans la configuration du dessin, elle tend à enfoncer

davantage A_1 dans A_2 ; de ce fait, elle est dirigée vers le bas. Lorsque la différence de potentiel V est appliquée entre les armatures, \vec{f} est équilibrée par $\vec{f}_{ext} = -\vec{P}$ avec $\vec{P} = m g \vec{i}$.

Un déplacement infinitésimal $dx \vec{i}$ de A_1 sous l'effet de \vec{f}_{ext} , apporte au condensateur l'énergie $dW_{ext} = \vec{f}_{ext} \cdot dx \vec{i} = -m g dx$.

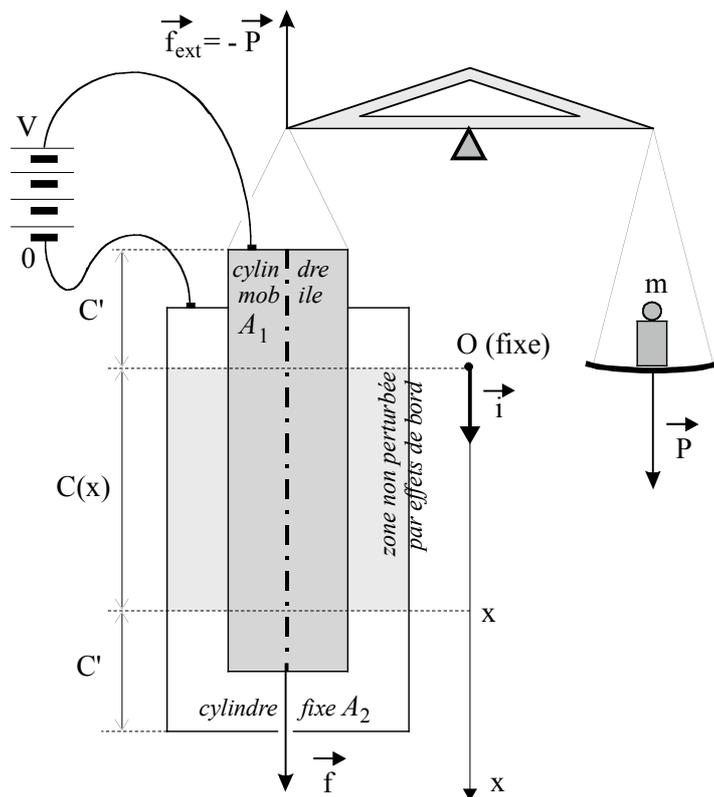
Les 3 parts du condensateur complet, de capacités respectives C' , $C(x)$ et C' , peuvent être vues comme 3 condensateurs en parallèle. Par conséquent, la capacité totale du condensateur complet est $C_{tot} = C(x) + 2C'$ avec :

$$C(x) = \frac{2\pi \epsilon_0}{\ln(R_2/R_1)} x ;$$

le déplacement dx produit donc :

$$dC_{tot} = dC(x) = \frac{2\pi \epsilon_0}{\ln(R_2/R_1)} dx ,$$

les capacités C' ne variant pas.



Au potentiel constant V , le déplacement dx entraîne le générateur à transférer la charge dQ d'une armature à l'autre, donc à fournir au condensateur le travail $dW_{géné} = V dQ$.

Il s'ensuit que la variation de l'énergie potentielle du condensateur dans l'opération est, finalement, la somme : $dW = dW_{ext} + dW_{géné}$.

$$\text{Or, } W = \frac{C V^2}{2} \Rightarrow dW = \frac{V^2}{2} dC = dW_{ext} + V dQ = dW_{ext} + V^2 dC ;$$

$$\text{d'où : } dW_{ext} = -\frac{V^2}{2} dC .$$

$$\text{Par conséquent : } -m g dx = -\frac{V^2}{2} dC \quad \text{et} \quad V = \sqrt{\frac{m g}{\pi \epsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} = 41150 V$$

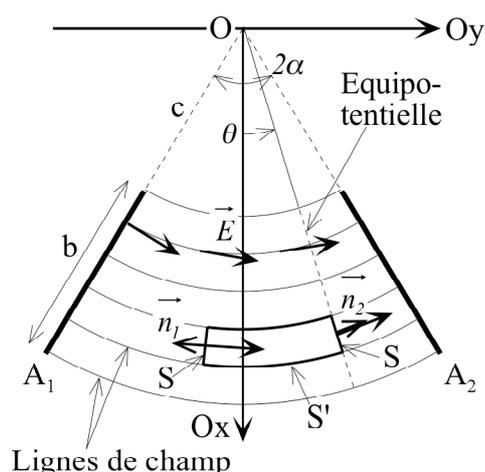
Remarque : il aurait été erroné d'écrire directement, en utilisant la relation $W = C V^2/2$, qu'à V constant, la variation d'énergie du condensateur $dW = V^2 dC/2$ représente le seul travail des forces extérieures appliquées. Cela impliquerait, en effet, que les forces extérieures fournissent du travail ($dW > 0$) pour accroître la capacité du condensateur ($dC > 0$) . Or, les armatures s'attirant entre elles du fait qu'elles portent des charges opposées, c'est le condensateur, au contraire, qui produit du travail tout en augmentant spontanément sa capacité...

23.(D) Le plan (O,x,z) (perpendiculaire à la feuille) est un plan de symétrie du condensateur. Le champ électrique \vec{E} lui est donc perpendiculaire. De même, le champ \vec{E} est perpendiculaire aux armatures du condensateur (conducteurs = équipotentiels). Par extension, on peut imaginer qu'entre les armatures, le champ \vec{E} est perpendiculaire à tout plan contenant l'axe (Oz). Les nappes de champ sont alors des arcs de cylindres d'axe (Oz). Ce raisonnement qualitatif n'est valable que si l'on reste entre les armatures A_1 et A_2 , et pas trop près de leurs bords. Dans tout ce qui suit, on se limitera à cette région de l'espace.

Appliquons le théorème de Gauss à un volume limité d'une part : par 2 sections planes de surface S situées dans deux plans contenant l'axe (Oz) ; et d'autre part : par des côtés S' qui suivent des arcs de cercles centrés sur l'axe (Oz) (cf. figure).

D'après ce qui précède :

- le flux de \vec{E} à travers les côtés S' est nul.
- \vec{E} est perpendiculaire aux surfaces S .



En faisant alors tendre les surfaces S vers des points (le volume de Gauss tend vers une tube mince), on en déduit l'expression : $\vec{E}_1 \cdot \vec{n}_1 S + \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_2 S = (-E_1 + E_2) S = 0$ car il n'y a aucune

charge dans le volume considéré. On en déduit que le champ \vec{E} est constant le long d'une ligne de champ circulaire. On peut alors écrire : $\vec{E} = E_\theta \vec{u}_\theta$ (en coordonnées cylindriques, où θ est compté par rapport à l'axe (Ox)). La composante E_θ peut dépendre de r et de z mais ne dépend pas de l'angle θ (\vec{E} est constant sur une même ligne de champ en arc de cercle).

Pour calculer le potentiel, rappelons que les surfaces équipotentiels sont perpendiculaires aux lignes de champ. Ce sont donc des plans contenant l'axe (Oz) (repérés par l'angle θ).

Le potentiel d'un plan s'obtient en écrivant :

$$\int_{V_0}^{V(\theta)} dV = \int_{-\alpha}^{\theta} -E_\theta \vec{MM}' = \int_{-\alpha}^{\theta} -E_\theta u_\theta r d\theta u_\theta$$

Soit $V(\theta) - V_0 = -E_\theta r(\theta + \alpha)$ soit : $V(\theta) = V_0 - E_\theta r(\theta + \alpha)$ et on détermine E_θ en écrivant que

$V(\alpha) = 0$ soit : $E_\theta = \frac{V_0}{2r\alpha}$ d'où l'expression complète du potentiel :

$$V(\theta) = \frac{V_0}{2} \left(1 - \frac{\theta}{\alpha} \right)$$

le potentiel varie linéairement avec θ entre V_0 et 0.

Pour déterminer la densité superficielle de charges sur la surface A_1 , on écrit qu'au voisinage de ce conducteur le champ vaut $\vec{E}_1 = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} \vec{u}_\theta$ (Théorème de Coulomb). D'autre part, on vient de voir que

$$\vec{E} = E_\theta \vec{u}_\theta \text{ avec } E_\theta = \frac{V_0}{2r\alpha}$$

d'où :

$$\sigma_1 = \frac{\epsilon_0 V_0}{2r\alpha}.$$

Les deux armatures du condensateur étant en influence totale, on a $\sigma_2 = -\frac{\epsilon_0 V_0}{2r\alpha}$ (on aurait pu retrouver

ce résultat avec le théorème de Gauss). On remarque que les densités de charges ne sont pas uniformes, mais varient avec r .

La quantité totale de charge Q_1 (sur A_1 par exemple) se calcule avec l'intégrale :

$$Q_1 = \int_{\text{Surface}} \sigma_1 d^2 \Sigma = a \int_c^{c+b} \sigma_1(r) dr = a \int_c^{c+b} \frac{\epsilon_0 V_0}{2r\alpha} dr = \frac{a\epsilon_0 V_0}{2\alpha} \ln\left(\frac{c+b}{c}\right) \text{ (et } Q_2 = -Q_1).$$

Finalement, la capacité s'écrit :

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{Q}{V_0} = \frac{a\epsilon_0}{2\alpha} \ln\left(\frac{c+b}{c}\right)$$

Rappelons pour conclure que tous les raisonnements et calculs qui précèdent s'appliquent à condition que les effets de bords soient négligés.

Energie potentielle électrostatique

24.(F) a) Soit un condensateur plan de capacité C et de charge Q , dont les armatures de surface S sont distantes de l dans le vide. Entre ces armatures soumises à la différence de potentiel U , le champ est uniforme de module $E = U/l = Q/Cl$. L'énergie potentielle $W = Q^2/2C$ du condensateur étant supposée répartie dans la zone entre armatures, sa valeur par unité de volume est $u = W/S l$; ce qu'on peut réécrire $u = Q^2/2C S l = E^2 C l/2S$. Ainsi, puisque $C = \epsilon_0 S/l$, obtient-on $u = \epsilon_0 E^2/2$. Cette dernière expression est générale, c'est-à-dire valable en tout point du vide où règne un champ \vec{E} .

b) - Soient \vec{f}_A , \vec{f}_B et \vec{f}_C les forces électrostatiques respectivement sur A , B et C . On a :

$$\vec{f}_A = K e \left[\frac{-e}{a^2} (-\vec{i}) + \frac{+e}{4a^2} (-\vec{i}) \right] = \frac{K e^2}{a^2} \left(1 - \frac{1}{4} \right) \vec{i} = \frac{3K e^2}{4a^2} \vec{i} \Rightarrow \|\vec{f}_A\| = 1,73 10^{-8} \text{ N} ;$$

$$\vec{f}_B = \vec{0}, \text{ en raison de la symétrie par rapport au point } O ;$$

$$\vec{f}_C = -\vec{f}_A, \text{ en raison de la symétrie par rapport au point } O .$$

Les charges étant ponctuelles, leurs potentiels respectifs sont :

$$V_A = K \left[\frac{-e}{a} + \frac{+e}{2a} \right] = -\frac{K e}{2a} ;$$

$$V_B = K \left[\frac{e}{a} + \frac{e}{a} \right] = \frac{2K e}{a} ;$$

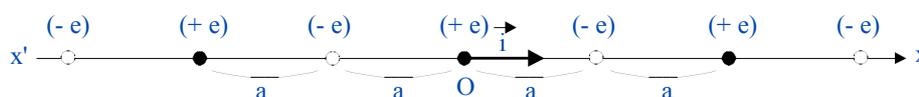
$$V_C = V_A, \text{ en raison de la symétrie par rapport au point } O .$$

L'énergie potentielle d'un système de n conducteurs aux potentiels respectifs V_i , et portant les charges respectives Q_i , étant :

$$W = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} Q_i V_i ,$$

on a :

$$W = \frac{1}{2} \left[-\frac{K e^2}{2a} - \frac{2K e^2}{a} - \frac{K e^2}{2a} \right] = -\frac{3K e^2}{2a} = -3,46 10^{-18} \text{ J} = -21,6 \text{ eV}$$



- Le potentiel créé en O par toutes les autres charges, est :

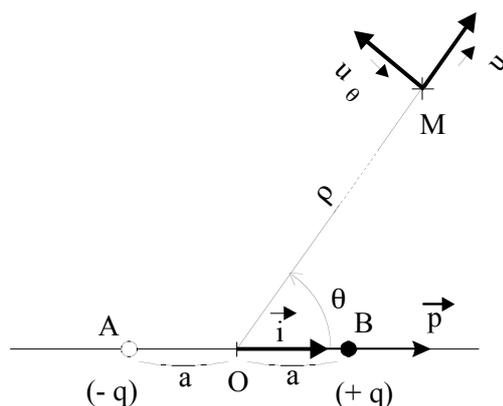
$$V_O = K \left[\frac{-2e}{a} + \frac{+2e}{2a} + \frac{-2e}{3a} + \frac{+2e}{4a} + \dots \right] = -\frac{2K e}{a} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \right) = -\frac{2K e}{a} \text{Ln } 2$$

La charge e en O étant ponctuelle, l'énergie potentielle qu'elle possède au sein du système des autres charges, est égal au travail à fournir pour l'amener (très lentement) de l'infini, où le potentiel est nul, en O , où il vaut V_O ; soit :

$$w = e(V_O - 0) = -\frac{2K e^2}{a} \text{Ln } 2 = -3,19 \cdot 10^{-18} \text{ J} = -20,0 \text{ eV}$$

Remarque : A l'inverse, $-w$ est l'énergie qu'il faudrait apporter à la charge e pour l'extraire de son réseau.

25.(F) Soit un dipôle constitué des charges $+q$ et $-q$ à la distance $2a$ l'une de l'autre. Si \vec{i} est le vecteur unitaire porté par la droite qui joint ces charges et qui est orienté de $-q$ vers $+q$, son moment dipolaire s'écrit $\vec{p} = 2a q \vec{i} = p \vec{i}$.



On sait qu'en un point $M(\rho, \theta)$ tel que $\rho \gg a$, un dipôle crée le potentiel $V = K p \frac{\cos \theta}{\rho^2}$. Or,

dans les coordonnées polaires, on a $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\frac{\partial V}{\partial \rho} \vec{u}_\rho - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta$. Par conséquent, le champ

en $M(\rho, \theta)$ s'écrit :

$$\vec{E} = \frac{K}{\rho^3} [2p \cos \theta \vec{u}_\rho + p \sin \theta \vec{u}_\theta].$$

Maintenant, puisque $\vec{i} = \cos \theta \vec{u}_\rho - \sin \theta \vec{u}_\theta$, le moment \vec{p} peut se formuler dans les coordonnées polaires, comme $\vec{p} = p \cos \theta \vec{u}_\rho - p \sin \theta \vec{u}_\theta$. Ainsi, en ajoutant et retranchant le terme $p \cos \theta \vec{u}_\rho$ à l'expression de \vec{E} , on obtient :

$$\vec{E} = \frac{K}{\rho^3} \left[3p \cos \theta \vec{u}_\rho - (p \cos \theta \vec{u}_\rho - p \sin \theta \vec{u}_\theta) \right],$$

soit :

$$\vec{E} = \frac{K}{\rho^3} \left[3(\vec{p} \cdot \vec{u}_\rho) \vec{u}_\rho - \vec{p} \right].$$

26.(M) L'énergie potentielle d'un dipôle dans un champ électrique \vec{E} en un point O , est égale au travail à produire pour amener ce dipôle de l'infini, où le potentiel est supposé nul, au point O .

Remarquons qu'entre les deux charges opposées du dipôle, il existe une énergie d'interaction. Mais, un dipôle étant considéré indéformable par nature, cette énergie est *irrécupérable* et ne peut, en conséquence, être considérée comme « potentielle ». Il serait donc faux de calculer l'énergie recherchée par la relation

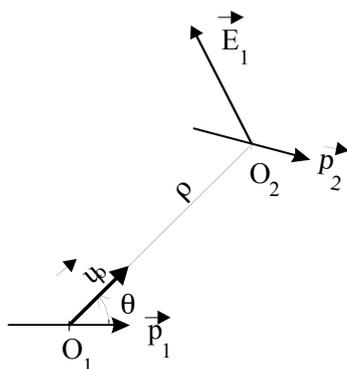
générale $W = \sum_{i=1}^n Q_i V_i / 2$ qui prend nécessairement en compte cette énergie d'interaction.

Soient, alors, V et $V + dV$ les potentiels aux deux points M et M' infiniment proches l'un de l'autre, où se retrouvent respectivement les charges $-q$ et $+q$ du dipôle dans leurs positions finales.

Comme les positions initiales sont situées infiniment loin de M et M' dans une zone où le potentiel est supposé nul, l'énergie dépensée pour ramener ces deux charges simultanément de l'infini, est la somme :

$$w = (-q)[V - 0] + (+q)[(V + dV) - 0] = q dV$$

Alors, si \vec{E} est le champ en M , la différence de potentiel entre M et M' étant $dV = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{MM'}$ par définition, l'énergie potentielle du dipôle peut s'écrire, sachant que $\overrightarrow{MM'} = 2a \vec{i}$:



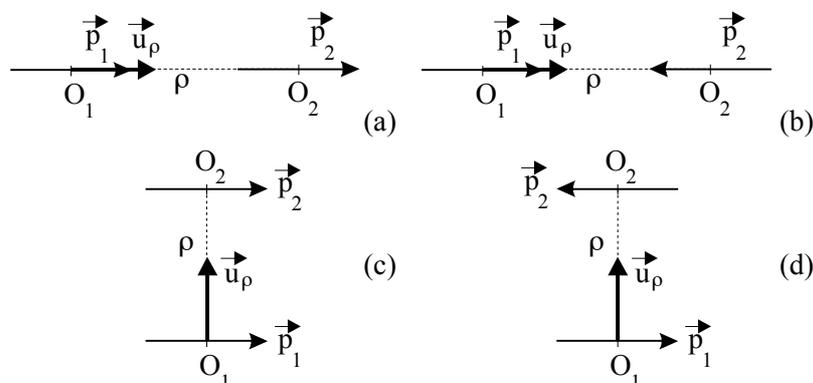
$$w = q dV = -\vec{E} \cdot 2a q \vec{i} = -\vec{E} \cdot \vec{p}$$

- Si amener de l'infini un dipôle à proximité d'un autre nécessite un *apport extérieur* d'énergie, cela signifie qu'il faut lutter contre leurs forces d'interaction et qu'en conséquence, celles-ci sont *répulsives*. Si, au contraire, ce rapprochement *s'effectue spontanément*, cela signifie évidemment que ces forces sont *attractives*. Or, dans le premier cas, l'apport extérieur d'énergie accroît l'énergie potentielle des deux

dipôles depuis zéro (puisque, au départ, ces dipôles sont infiniment loin l'un de l'autre) jusqu'à une valeur finie nécessairement *positive* ; tandis que dans le second, le travail dépensé ne peut être prélevé que sur l'énergie potentielle disponible qui diminue ainsi de zéro jusqu'à une valeur finie obligatoirement *négative*. Par conséquent, une énergie potentielle *positive* est le signe de forces d'interaction *répulsives*, tandis qu'une *négative* est le signe de forces *attractives*.

L'énergie potentielle d'interaction entre \vec{p}_1 et \vec{p}_2 , est l'énergie potentielle de \vec{p}_2 dans le champ \vec{E}_1 créé en O_2 par \vec{p}_1 (ou celle de \vec{p}_1 dans \vec{E}_2 créé en O_1 par \vec{p}_2), soit, selon l'exercice précédent :

$$w_{12} = -\vec{E}_1 \cdot \vec{p}_2 = -\frac{K}{\rho^3} \left[3(\vec{p}_1 \cdot \vec{u}_\rho) \vec{u}_\rho - \vec{p}_1 \right] \vec{p}_2 = -\frac{K}{\rho^3} \left[3(\vec{p}_1 \cdot \vec{u}_\rho)(\vec{u}_\rho \cdot \vec{p}_2) - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 \right]$$



Posons $\|\vec{p}_1\| = p_1$ et $\|\vec{p}_2\| = p_2$; alors, d'après la figure ci-dessus :

(a) Si \vec{p}_1 et \vec{p}_2 sont alignés de même sens, on a $\vec{p}_1 \cdot \vec{u}_\rho = p_1$, $\vec{p}_2 \cdot \vec{u}_\rho = p_2$, $\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = p_1 p_2$, et

donc $w_{12} = -\frac{K}{\rho^3} 2p_1 p_2 < 0$; les forces d'interaction sont attractives.

(b) Si \vec{p}_1 et \vec{p}_2 sont alignés de sens contraire, $\vec{p}_1 \cdot \vec{u}_\rho = p_1$, $\vec{p}_2 \cdot \vec{u}_\rho = -p_2$, $\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = -p_1 p_2$,

et donc $w_{12} = +\frac{K}{\rho^3} 2p_1 p_2 > 0$; les forces d'interaction sont répulsives.

(c) Si \vec{p}_1 et \vec{p}_2 sont côte à côte, parallèles et de même sens, on a $\vec{p}_1 \cdot \vec{u}_\rho = 0$, $\vec{p}_2 \cdot \vec{u}_\rho = 0$,

$\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = p_1 p_2$, et donc $w_{12} = +\frac{K}{\rho^3} p_1 p_2 > 0$; les forces d'interaction sont répulsives.

(d) Si \vec{p}_1 et \vec{p}_2 sont côte à côte, parallèles et de sens opposé, on a $\vec{p}_1 \cdot \vec{u}_\rho = 0$, $\vec{p}_2 \cdot \vec{u}_\rho = 0$,

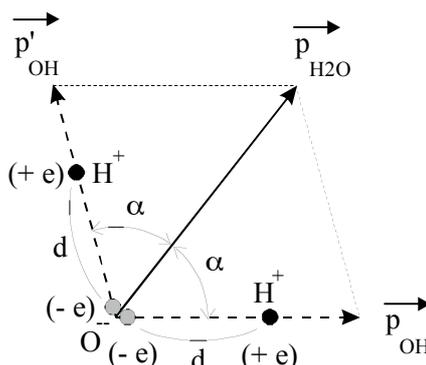
$\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = -p_1 p_2$, et donc $w_{12} = -\frac{K}{\rho^3} p_1 p_2 > 0$; les forces d'interaction sont attractives.

27.(F) Selon l'exercice précédent :

$$w_{\text{int.}} = -\frac{K}{\rho^3} p_1 p_2 = -\frac{p^2}{4\pi \epsilon_0 \rho^3} = -1,28 10^{-20} \text{ J} = -0,080 \text{ eV} .$$

- la grandeur $-w_{\text{int}}$ représente l'énergie qu'il est nécessaire de fournir pour dissocier deux molécules d'eau (les éloigner infiniment l'une de l'autre) ; elle est donc liée à la chaleur latente de *vaporisation* de l'eau.

28.(F)



R : - Notons \vec{p}_{H_2O} le moment dipolaire de la molécule d'eau, et \vec{p}_{OH} et \vec{p}'_{OH} les moments des deux dipôles portant chacun les charges $(-e)$ et $(+e)$ à la distance d l'une de l'autre, dont elle serait constituée. On devrait donc avoir :

$$\vec{p}_{H_2O} = \vec{p}_{OH} + \vec{p}'_{OH} ,$$

soit

$$\|\vec{p}_{H_2O}\| = 2\|\vec{p}_{OH}\| \cos \alpha \text{ avec } 2\alpha = 105^\circ \text{ et } \|\vec{p}_{OH}\| = \|\vec{p}'_{OH}\| = e d ;$$

d'où l'on tire :

$$d = \frac{\|\vec{p}_{H_2O}\|}{2e \cos \alpha} = 3,2 10^{-11} \text{ m} .$$

- La distance ainsi obtenue est trois fois plus faible qu'en réalité, parce que la charge « effective » de la molécule d'oxygène n'est pas $-2e$, mais $-2e/3$; ce qui réduit à $(-e/3)$ et $(+e/3)$ les deux charges « effectivement » portées par chacun des deux dipôles \vec{p}_{OH} et \vec{p}'_{OH} . De ce fait, la distance d précédemment calculée se trouve être multipliée par trois.