

UE PHY241

DLST - U. J. Fourier

Année 2007/08

Cours d'ELECTROMAGNETISME

DEUXIEME PARTIE :

MAGNETOSTATIQUE , MAGNETODYNAMIQUE & INDUCTION

2.1. Phénomènes fondamentaux et postulats de l'électromagnétisme	1
2.2. Champ magnétique dans le vide en régime stationnaire	13
2.3. Circulation du champ magnétique et dipôle magnétique	26
2.4. Forces et énergie magnétique	34
2.5. Induction magnétique	44
2.6. Les relations de Maxwell	52
2.7. Les ondes électromagnétiques	63

Enseignants : Christophe FURGET / Pierre TOULEMONDE

Document élaboré à partir du cours de PHY241 2006-07 d'Alain Chiron de la Casinière

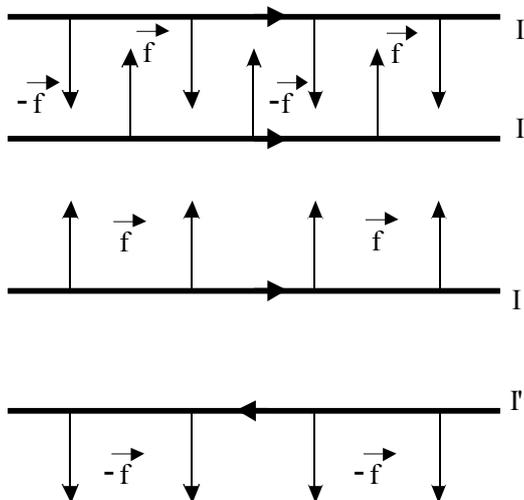
2.1. Phénomènes fondamentaux et postulats de l'électromagnétisme

Les premiers *aimants* connus étaient constitués d'un minéral naturellement magnétique découvert, dès l'antiquité, à proximité de la ville de Magnésia (Turquie) et appelé, pour cela, *magnétite*. Les propriétés de ces aimants naturels ont été mises à profit par les chinois qui ont confectionné, il y a déjà plus de mille ans, les premières boussoles. La preuve de l'existence d'un lien entre phénomènes *électriques* et *magnétiques* est beaucoup plus récente puisqu'elle ne date que du 18^{ème} siècle. En effet, si l'on avait depuis longtemps remarqué que certaines parties métalliques des navires *s'aimantaient*, par exemple, lorsque ceux-ci étaient frappés par la foudre, il fallut attendre les travaux de Benjamin Franklin sur la foudre pour que naisse l'idée d'une possible communauté de nature entre électricité et magnétisme. Une formulation reliant ces deux phénomènes entre eux, n'a cependant été élaborée qu'au 19^{ème} siècle par Maxwell qui a proposé, vers 1873, un jeu d'équations dont l'interprétation complète n'a pu être donnée qu'en 1905, dans le cadre de la théorie de la relativité développée par Einstein.

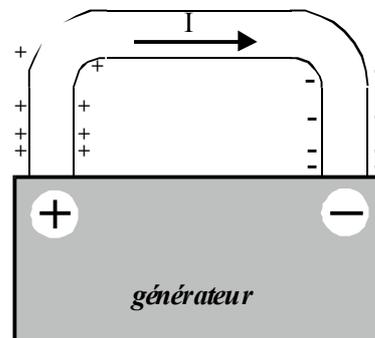
Nous présentons, ci-dessous, les expériences fondamentales qui mettent en évidence les *effets magnétiques de l'électricité*, ainsi que les postulats qui en découlent et fondent ce qu'il est convenu d'appeler l'*électromagnétisme* (sous une forme plus complète et plus élaborée, ces postulats se condensent en un jeu d'équations appelées *équations de Maxwell*).

2.1.1. Forces s'exerçant entre circuits électriques

L'expérience montre que deux fils conducteurs parallèles parcourus par des courants électriques (figure 2.1.1.a) *s'attirent* si les courants sont de *même sens*, et se *repoussent* s'ils sont de sens *contraire*.



2.1.1.a



2.1.1.b

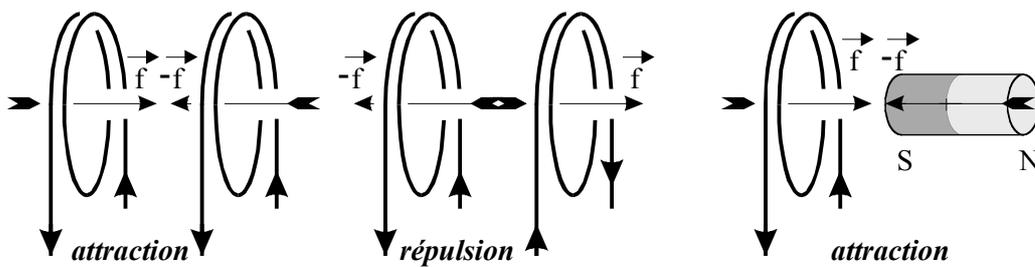
La *loi de Coulomb* étudiée au chapitre précédent ne permet pas d'expliquer ces actions. En effet, si on admet généralement que, sur les conducteurs, existent des charges superficielles *immobiles* qui créent un champ électrostatique auquel sont soumises les charges participant au courant (figure 2.1.1.b), leur densité surfacique est bien trop faible pour rendre compte des forces qui se manifestent, dans ce cas, entre les fils. Quant aux autres charges intérieures à chacun des deux conducteurs (ions fixes du réseau et électrons libres), elles se compensent mutuellement et ne peuvent donc créer de forces d'un fil à l'autre.

On constate les mêmes phénomènes d'attraction et de répulsion entre circuits de *formes quelconques*. Ces phénomènes sont donc généraux et conduisent à postuler que deux charges *en mouvement l'une par rapport à l'autre*, exercent entre elles des forces particulières dites *électromagnétiques*.

2.1.2. Conception ampérienne du magnétisme

Deux fils conducteurs enroulés sous forme de bobines (solénoïdes) et mis en vis à vis comme le montre la figure 2.1.2.a, exercent l'un sur l'autre des forces (électromagnétiques) lorsqu'ils sont parcourus par des courants. Le sens de ces forces dépend des *sens* respectifs de rotation des courants dans les deux spires : si ces sens sont les *mêmes*, les bobines *s'attirent* ; s'ils sont opposés, elles se repoussent.

Lorsqu'on remplace l'un des deux solénoïdes par un barreau aimanté (voir la figure 2.1.2.b), il y a répulsion ou attraction selon l'orientation du barreau et le sens du courant dans le solénoïde restant. C'est ce phénomène qui a conduit *Ampère* à conjecturer l'existence, dans la matière aimantée, d'un très grand nombre de courants circulaires orientés de la même façon et produisant les mêmes effets magnétiques qu'une bobine.



2.1.2.a

2.1.2.b

On explique, aujourd'hui, l'origine du magnétisme par le « mouvement » des électrons liés aux atomes (mouvement orbital autour du noyau, et mouvement de rotation sur eux-mêmes). Nous nous contenterons, dans ce module, de reprendre l'hypothèse d'Ampère en admettant l'existence de courants circulaires microscopiques généralement appelés courants ampériens (ou « ampériens » tout court).

2.1.3. Force électrique, force magnétique, force de Lorentz

Considérons, dans le vide, un système de charges *en mouvement* dans un repère $[R]$ attaché à un référentiel *galiléen* (par exemple, un courant électrique d'intensité constante ou variable, dans un circuit quelconque). L'expérience montre qu'une charge ponctuelle q se trouvant, à l'instant t , en un point M au voisinage de ce système, subit une force \vec{f} *proportionnelle* à q . Deux cas peuvent, alors, se présenter :

- q possède une *vitesse nulle* dans $[R]$; alors \vec{f} se réduit à une *force électrique* \vec{f}_e que l'on pose telle que :

$$\vec{f}_e = q \vec{E} \quad 2.1.3.a$$

la grandeur vectorielle \vec{E} étant appelée *champ électrique* (non assimilable, sauf conditions particulières, au champ *électrostatique* \vec{E}_s) ;

- q possède en M une vitesse \vec{v} non nulle dans $[R]$; alors, à la force précédente s'*ajoute* une autre force \vec{f}_m orthogonale à \vec{v} et proportionnelle à son module $|\vec{v}|$, dite *force magnétique* (parfois nommée force de Laplace ou de Lorentz) ; cette force est posée telle que :

$$\vec{f}_m = q \vec{v} \wedge \vec{B} \quad 2.1.3.b$$

relation dans laquelle la grandeur vectorielle \vec{B} désigne un nouveau champ appelé *champ magnétique*.

Au bilan on a donc :

$$\vec{f} = q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad 2.1.3.c$$

expression connue sous le nom de *force de Lorentz*, qui définit à la fois le champ électrique \vec{E} et le champ magnétique \vec{B} produit au point M par le système de charges *en mouvement*, et constitue un *postulat fondamental* de la physique. Cet ensemble de deux champs est ce que l'on appelle le *champ électromagnétique*.

Le champ *électrique* a les mêmes dimensions que le champ *électrostatique*, et s'exprime pour cela en $V m^{-1}$.

D'après la définition de la force magnétique, le champ *magnétique* a pour dimensions :

$$[B] = \frac{[F]}{[Q][V]} = M L T^{-2} I^{-1} T^{-1} L^{-1} T = M T^{-2} I^{-1}$$

Son unité dans le SI, est le *Tesla* de symbole T . On utilise aussi le *Gauss* de symbole G , 1 Gauss étant égal à 10^{-4} Tesla.

Voici quelques ordres de grandeur de champ magnétique :

- aimant courant $B \approx 10 \text{ mT}$ (100 G);
- électroaimant ordinaire $B \approx 1 T$;
- bobine supraconductrice $B \approx 20 T$;
- champ terrestre, composante verticale $\approx 0,04 \text{ mT}$ (0,4 G), composante horizontale $\approx 0,03 \text{ mT}$ (0,3 G).

Remarques :

1. Si toutes les charges du système sensé produire le champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) sont *immobiles* dans $[R]$, ce champ se réduit évidemment au seul champ *électrostatique* \vec{E}_s .
2. S'il existe deux systèmes de charges distincts créant chacun en M un champ électrique et un champ magnétique particuliers, les champs électrique et magnétique résultants en M , sont les *sommes vectorielles* respectives de ces champs électriques et magnétiques particuliers. Cette proposition est connue sous le nom de *théorème de superposition*.

3. Un *changement de référentiel galiléen* modifie \vec{E} , \vec{B} et \vec{v} , donc les forces électrique et magnétique. Mais, tant que \vec{v} reste petite devant la vitesse de la lumière, ces modifications *se compensent* de sorte que la force de Lorentz peut être considérée comme *invariante*.

2.1.4. Applications

- Trajectoire d'une charge ponctuelle dans un champ magnétique uniforme

Considérons, dans un repère $[Oxyz]$ attaché à un référentiel galiléen, une charge ponctuelle q de masse m , animée d'une vitesse \vec{v} . Supposons, de plus, que dans l'espace ainsi défini, règne un champ magnétique *uniforme* tel que $\vec{B} = B \vec{k}$. Cette charge subit donc la force magnétique \vec{f}_m et, d'après le principe fondamental de la dynamique, on a :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

soit puisque $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$:

$$\frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j} + \frac{dv_z}{dt} \vec{k} = \frac{qB}{m} (v_x \vec{i} \wedge \vec{k} + v_y \vec{j} \wedge \vec{k} + v_z \vec{k} \wedge \vec{k}) = \frac{qB}{m} (-v_x \vec{j} + v_y \vec{i})$$

Par conséquent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv_x}{dt} = + \frac{qB}{m} v_y \quad (a) \\ \frac{dv_y}{dt} = - \frac{qB}{m} v_x \quad (b) \\ \frac{dv_z}{dt} = 0 \Rightarrow v_z = \text{const.} \end{array} \right.$$

soit, en dérivant (a) et (b) par rapport à t :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \rightarrow \frac{d^2 v_x}{dt^2} = + \frac{qB}{m} \frac{dv_y}{dt} = - \left(\frac{qB}{m} \right)^2 v_x \Rightarrow v_x = C \cos(\omega t + \varphi) \\ (b) \rightarrow \frac{d^2 v_y}{dt^2} = - \frac{qB}{m} \frac{dv_x}{dt} = - \left(\frac{qB}{m} \right)^2 v_y \Rightarrow v_y = D \cos(\omega t + \psi) \end{array} \right.$$

avec $\omega = \frac{qB}{m}$.

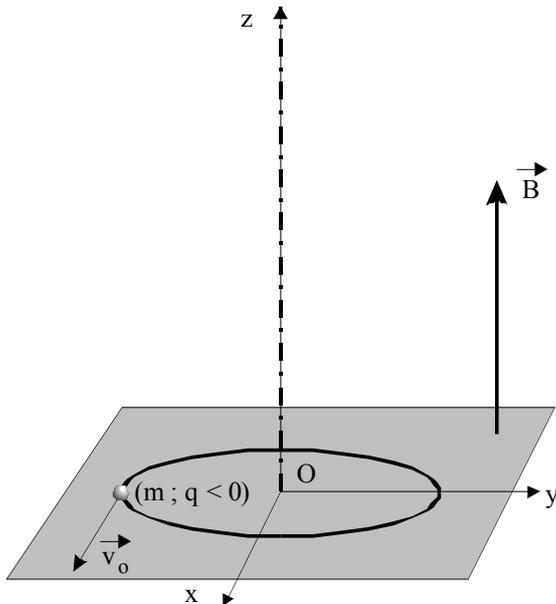
En choisissant alors $\varphi = 0$ et $\vec{v} = v_o \vec{i}$ à $t = 0$ (soit, $v_x = v_o$, $v_y = 0$; $v_z = 0$), on obtient $C = v_o$ et $\psi = \pi/2 \Rightarrow v_x = v_o \cos \omega t$ et $v_y = -D \sin \omega t$. Alors, comme $dv_y/dt = -(qB/m)v_x = -\omega v_x$, on peut écrire $-D \omega \cos \omega t = -\omega v_o \cos \omega t$; d'où il vient que $D = v_o$, soit :

$$\begin{cases} v_x = v_o \cos \omega t \\ v_y = -v_o \sin \omega t \end{cases}$$

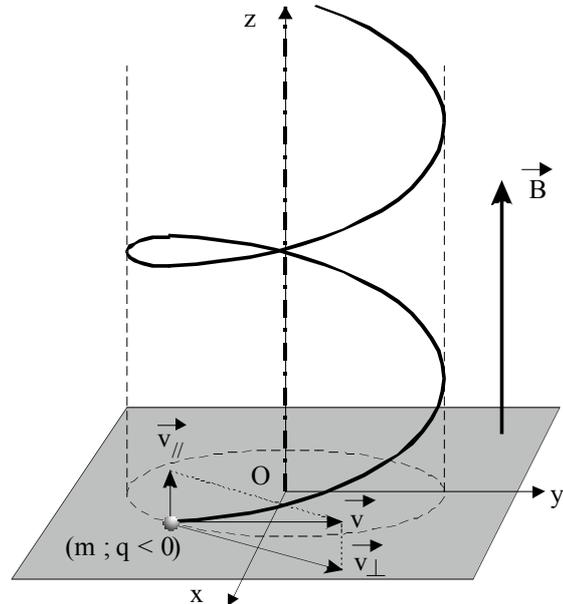
En intégrant une dernière fois et en choisissant (arbitrairement) $x = 0$ et $y = v_o/\omega$ à $t = 0$, on obtient ainsi :

$$\begin{cases} x = \frac{v_o}{\omega} \sin \omega t + const. = \frac{m v_o}{q B} \sin \omega t + 0 \\ y = \frac{v_o}{\omega} \cos \omega t + const. = \frac{m v_o}{q B} \cos \omega t + 0 \end{cases}$$

qui sont les équations paramétriques d'une *trajectoire circulaire* de centre O , de rayon $R = v_o/|\omega| = m v_o/|q|B$, parcourue avec une vitesse de module constant v_o (figure 2.1.4.a).



2.1.4.a



2.1.4.b

Remarques :

1. On vérifie qu'un *électron* (charge $q = -e$), décrit sa trajectoire dans le sens *direct*.
2. Une particule chargée pénétrant transversalement un champ magnétique se met ainsi à décrire un cercle ; elle y est donc non seulement déviée, mais elle s'y trouve *piégée*.
3. Dans le cas général, la vitesse initiale d'une particule chargée dans un champ magnétique peut s'écrire comme la somme d'une composante orthogonale au champ, et d'une composante qui lui est parallèle, soit : $\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel$. Il s'ensuit que la particule décrit dans ce champ une *hélice* (voir la figure 3.1.4.b) d'axe parallèle au champ et de rayon $R = m |\vec{v}_\perp| / q |\vec{B}|$, et progresse selon la direction du champ à la vitesse *constante* \vec{v}_\parallel puisque aucune force n'est appliquée dans cette direction.

- Effet Hall

Considérons, dans un repère $[Oxyz]$ attaché à un référentiel galiléen, une portion d'un conducteur fixe parcouru par un courant *constant* d'intensité I et plongé dans un champ magnétique *uniforme* \vec{B} . Supposons que cette portion ait la forme du parallélépipède rectangle $PQRSP'Q'R'S'$ représenté figure 3.1.4.c, dont le sommet P est confondu avec O , et dont les arêtes $PQ=l$, $PS=b$ et $PP'=a$ sont respectivement parallèles aux trois axes \vec{Ox} , \vec{Oy} et \vec{Oz} . Supposons également que le champ soit tel que $\vec{B} = B \vec{k}$ et que le courant (des charges positives réelles ou équivalentes) s'écoule parallèlement à \vec{Ox} , dans le sens des x croissants.

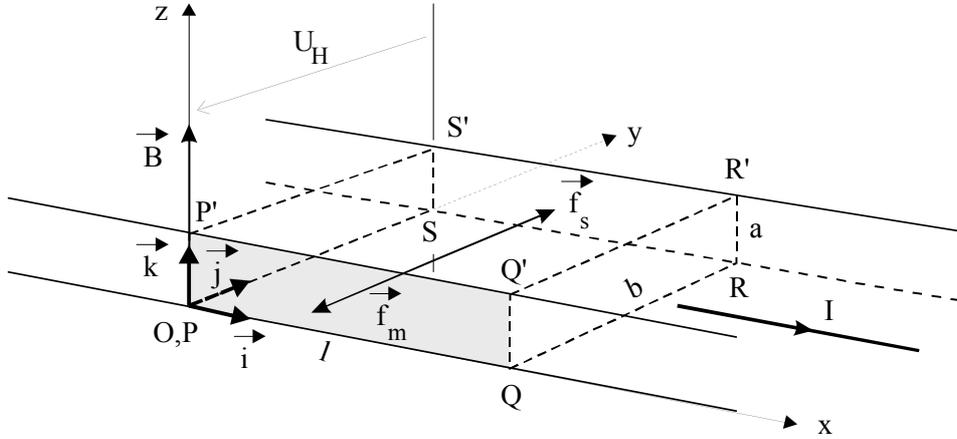
Dans la majorité des conducteurs, les charges q constituant les courants sont des électrons ; mais, dans certains semi-conducteurs, dans le zinc, le fer et quelques autres métaux, tout se passe comme si ces charges étaient *positives* (il s'agit, en fait, d'une conduction par « trous »).

En l'absence de \vec{B} , leur vitesse (d'ensemble) peut s'écrire :

$$\vec{v} = v \vec{i}$$

avec $v > 0$ si $q > 0$ et $v < 0$ si $q < 0$, étant donné le sens choisi pour le courant. En présence de \vec{B} , chaque charge est donc soumise à la force magnétique :

$$\vec{f}_m = q \vec{v} \wedge \vec{B} = q v \vec{i} \wedge B \vec{k} = -q v B \vec{j}$$



2.1.4.c

Comme v et q sont du même signe, le produit qv est toujours positif et le sens de \vec{f}_m est toujours opposé à celui de \vec{j} vecteur unitaire de l'axe des \vec{Oy} . Il se produit donc, du côté $PQQ'P'$ du ruban, une accumulation des charges *en mouvement*, le côté $SRR'S'$ s'en trouvant dégarni par compensation et prenant, de ce fait, une charge de signe contraire. La polarisation opposée de ces deux côtés crée dans le ruban, un champ électrostatique (supposé uniforme) $\vec{E}_H = E_H \vec{j}$, dit champ de Hall, tel que $E_H > 0$ si $q > 0$ et $E_H < 0$ si $q < 0$.

Le champ de Hall exerce, à son tour, la force électrostatique $\vec{f}_s = q \vec{E}_H = q E_H \vec{j}$ sur les charges en mouvement, force qui est de même sens que \vec{j} puisque le produit $q E_H$ est toujours positif. En régime *permanent* \vec{f}_s équilibre alors \vec{f}_m , et l'on peut écrire :

$$\vec{f}_s = -\vec{f}_m \Rightarrow q \vec{E}_H = q v B \vec{j} \Rightarrow \vec{E}_H = v B \vec{j}$$

Il s'établit ainsi entre $PQQ'P'$ et $SRR'S'$ une différence de potentiel telle que :

$$U_H = V_P - V_S = \int_S^P dV = \int_S^P -\vec{E}_H \cdot dy \vec{j} = - \int_{y=b}^{y=0} v B dy = v B b$$

dite tension de Hall, dont on voit qu'elle est du même signe que v , donc que q . Pour faire apparaître l'intensité I dans la tension de Hall, il suffit de se rappeler que si le vecteur densité de courant $\vec{j} = n q \vec{v} = n q v \vec{i}$ (que l'on ne confondra pas, ici, avec le vecteur unitaire de l'axe \vec{Oy} des coordonnées cartésiennes !) est uniforme, et si S est une section droite du conducteur munie du vecteur unitaire normal $\vec{N} \equiv \vec{i}$, on a :

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{N} d^2S = n q v \iint_S d^2S = n q v a b \Rightarrow v b = \frac{I}{n q a}$$

n étant la densité volumique des charges. Il s'ensuit que :

$$U_H = v b B = \frac{I B}{n q a} = R_H \frac{I B}{a}$$

$R_H = 1/n q$ étant appelée *constante de Hall*.

Remarque :

L'effet Hall a des applications importantes puisque le sens et la valeur de la tension de Hall permettent de déterminer, pour un conducteur solide, le signe des charges en mouvement et leur densité volumique. En outre, l'intensité I étant connue, la mesure de U_H permet de déterminer \vec{B} (« sonde de Hall »). Par exemple, avec $B = 1 T$, $I = 10 A$ et $a = 0,1 mm$, on obtient $U_H = -5,5 \mu V$ pour le cuivre ; on en déduit que les charges en mouvement sont des électrons (puisque $U_H < 0$), que la constante de Hall vaut $R_H = -5,5 \cdot 10^{-11} C^{-1} m^3$ et que la concentration en électrons libres est $n = 1/R_H q = 1,1 \cdot 10^{29} m^{-3}$.

2.1.5. Flux du champ magnétique

- Propriété de conservation du flux

Considérons, dans une zone où existe un champ magnétique \vec{B} , une surface fermée Σ quelconque munie, en chacun de ses éléments $d^2\Sigma$, d'un vecteur unitaire normal sortant \vec{N} . Alors, par propriété, le flux de \vec{B} sortant de Σ , est nul ; ce qui s'écrit :

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{N} d^2\Sigma = 0 \tag{2.1.5.a}$$

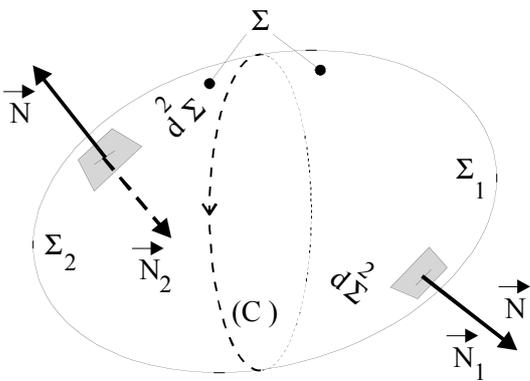
et s'énonce comme :

Le flux du champ magnétique sortant d'une surface fermée quelconque, est nul.

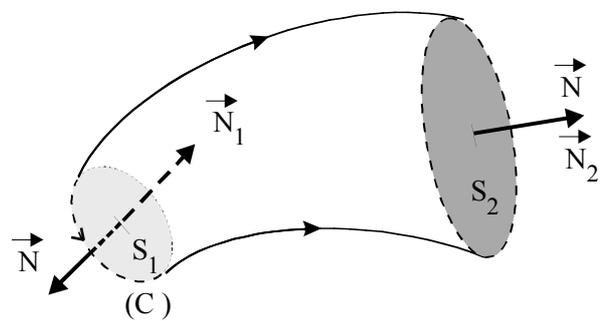
Cette loi est générale et reste valable, même en régime *variable*. Elle implique que :

le flux du champ magnétique à travers une surface ouverte s'appuyant sur un contour fermé, ne dépend pas du choix de cette surface.

Soit, en effet, les deux surfaces ouvertes Σ_1 et Σ_2 s'appuyant sur le même contour fermé (C) (voir la figure 2.1.5.a) ; pour déterminer les flux Φ_1 et Φ_2 qui les traversent respectivement, il faut convenir du sens de leurs vecteurs unitaires normaux respectifs en tout point, \vec{N}_1 et \vec{N}_2 . Pour cela, il est commode de se fixer (arbitrairement) un *sens de parcours* de (C), et de choisir pour sens des unitaires normaux celui dans lequel progresserait un tire-bouchon tournant dans ce sens de parcours. On peut considérer, maintenant, que l'ensemble des deux surfaces forme une surface *fermée* Σ au travers de laquelle le flux *sortant* est nul par propriété. Or, si le vecteur unitaire \vec{N} sortant de Σ par Σ_1 , est de même sens que \vec{N}_1 , la figure 2.1.5.a montre que celui sortant de Σ par Σ_2 est nécessairement de sens opposé à \vec{N}_2 (et vice-versa). Ainsi, si le flux sortant de Σ par Σ_1 est Φ_1 , et celui sortant de Σ par Σ_2 est $-\Phi_2$, on a $\Phi_1 + (-\Phi_2) = 0$ d'où $\Phi_1 = \Phi_2$.



2.1.5.a



2.1.5.b

- Lignes de champ et tubes de champ

Comme le champ électrique, le champ magnétique suit des *lignes de champ* (courbes en tout point desquelles il est tangent). On appelle *tube de champ* un ensemble de lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé.

Il est facile de voir que : *à l'intérieur d'un tube de champ, le flux se conserve* (c'est-à-dire, est le même à travers n'importe quelle *section* considérée du tube). Soit, en effet, une surface Σ constituée d'un tube de champ fermé par deux section quelconques S_1 et S_2 (figure 3.1.5.b), et soit (C) le contour orienté de S_1 . Le flux *sortant* de Σ étant nul par propriété, et celui sortant par les parois du tube étant encore nul du fait que le champ y est tangent en tout point par nature, le flux *sortant* de Σ par S_1 est l'opposé de celui *sortant* de Σ par S_2 . Mais si le flux *sortant* par S_1 a même signe que celui *traversant* cette surface (selon la convention de signe imposée par l'orientation du contour (C)), celui *sortant* par S_2 sera de signe opposé au flux qui *traverse* cette autre surface (selon la même convention de signe). Il s'ensuit que les flux *traversant* S_1 et S_2 ont même valeur absolue et même signe.

Remarques :

1. L'unité de flux de champ magnétique dans le SI est le *Weber* (symbole Wb).
2. Du fait de la conservation du flux du champ magnétique, un tube de champ créé par des systèmes de courants de dimensions finies, *se referme nécessairement sur lui-même*. Il en découle que, contrairement aux lignes de champ électrique, *les lignes de champ magnétique se referment sur elles-mêmes*.
3. La conservation du flux implique, également, que le module du champ dans un tube soit d'autant plus grand que le tube est plus étroit.
4. Les effets les plus spectaculaires et les plus connus dans la nature, de ces tubes de champ, sont les taches que l'on observe à la surface du soleil.

Travail Personnel

1. Retenir que la trajectoire d'une particule chargée dans un champ uniforme est, dans le cas général, une hélice.

2.2. Champ magnétique dans le vide en régime stationnaire

Nous n'envisagerons, dans les modules 2.2. à 2.4., que des champs créés par des systèmes de charges dans le *vide* en régime *stationnaire* comme, par exemple, des ensembles de courants *constants* parcourant des conducteurs *fixes* dans $[R]$.

2.2.1. *Caractères propres aux champs électrique et magnétique*

- *Le champ électrique*

En régime *stationnaire* où la vitesse moyenne des charges en mouvement est toujours très petite (et constante), le champ *électrostatique* est généralement de valeur *négligeable*. En effet, les charges intérieures à un conducteur étant *compensées*, le seul champ électrostatique possible est celui produit par les charges *fixes* présentes à la surface du conducteur (voir le § 2.1.1.) ; or, la densité superficielle de ces dernières est extrêmement faible. Il s'ensuit, finalement, que $\vec{E} \# \vec{0}$.

- *Le champ magnétique*

Soit une charge ponctuelle q appartenant à un système de charges en mouvement dans le vide, et se trouvant, à l'instant t , en un point P d'un repère $[R]$ dans lequel elle se déplace à la vitesse \vec{v} . On pose que le champ magnétique qu'elle crée à cet instant en un point M de ce vide se trouvant à la distance r de P (voir figure 2.2.1.a), est tel que :

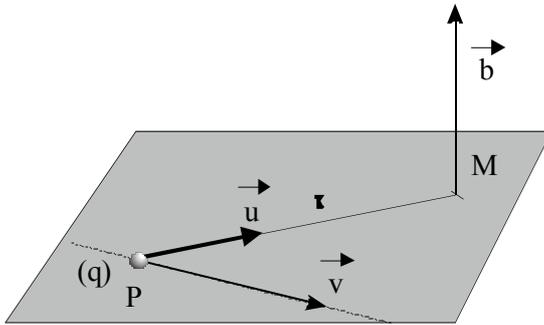
$$\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{q \vec{v} \wedge \vec{u}}{r^2} \quad 2.2.1.a$$

\vec{u} étant le vecteur unitaire fuyant la charge et pointant vers M , donc de mêmes direction et sens que \overrightarrow{PM} . La constante μ_o ainsi introduite est appelée *perméabilité absolue* ou *du vide* ; d'après la définition de l'ampère (que nous verrons plus loin) sa valeur est :

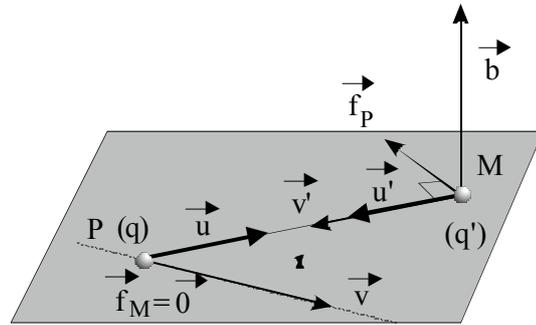
$$\mu_o = 4\pi 10^{-7} \quad (SI) \quad 2.2.1.b$$

La relation 2.2.1.a constitue *un postulat fondamental*. Mais, du fait qu'elle ne prend pas en compte le temps que nécessite la propagation dans l'espace du champ électromagnétique, elle

n'est valable, en toute rigueur, que dans le cadre des hypothèses de départ, c'est-à-dire, lorsque la charge q appartient à un ensemble de charges formant un courant *constant* dans un circuit *fixe* (régime *stationnaire*). Son utilisation pour la détermination du champ \vec{B} produit en un point de l'espace par une charge *isolée* en mouvement, par exemple, pourrait ainsi conduire à des résultats contradictoires. C'est pour rappeler cette restriction d'emploi que le champ magnétique y est représenté par une lettre *minuscule* au lieu de la majuscule habituelle.



2.2.1.a



2.2.1.b

En revanche, le champ magnétique \vec{B} créé en M par un courant en régime *stationnaire*, est (rigoureusement) la résultante des n champs \vec{B}_i de la relation 2.2.1.a que produisent en ce point les n charges q_i de vitesses respectives \vec{v}_i dont est constitué ce courant. La définition *pratique* - et parfaitement exacte - du champ magnétique, est donc finalement :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^n \frac{q_i \vec{v}_i \wedge \vec{u}_i}{r_i^2} \quad 2.2.1.c$$

r_i étant la distance P_iM à M du point P_i où se trouve q_i à l'instant t , et \vec{u}_i le vecteur unitaire fuyant q_i et pointant vers M (donc de mêmes direction et sens que $\overrightarrow{P_iM}$).

Remarques :

1. Si le régime du système de charges n'était pas *stationnaire* (comme, par exemple, des courants constants dans des circuits en mouvement, ou bien des courants variables dans des circuits fixes ou a fortiori en mouvement), \vec{E} ne serait plus négligeable et serait égal à la somme :

- du champ \vec{E}_s calculé par les relations de l'électrostatique,

- et d'un champ \vec{E}_m dit *électromoteur*, dont l'importance est considérable, en particulier dans les machines électriques.
2. Soient q et q' deux charges ponctuelles *isolées* se trouvant, à un instant donné, aux points P et M de l'espace, avec les vitesses \vec{v} et \vec{v}' (figure 2.2.1.b). Si \vec{B} est le champ produit par q en M selon la relation 2.2.1.a, et si \vec{B}' est celui produit en P par q' , il est facile de voir que les forces \vec{f} et \vec{f}' qui s'exercent respectivement sur q' et q d'après 2.1.3.b, ne sont *pas égales et opposées*. Ce résultat ne prouve pas, malgré tout, qu'il y ait là *violation du principe d'égalité de l'action et de la réaction*, puisque la relation 2.2.1.a ne doit pas être utilisée pour des charges *isolées* (cependant, en tenant compte du temps de propagation des ondes électromagnétiques, la théorie de la relativité permet de retrouver que, dans le cas d'une interaction de ce type, ce principe est parfaitement respecté).
 3. Une étude dimensionnelle des forces électrostatiques et des forces magnétiques montre que le produit $\mu_o \epsilon_o$ est inversement proportionnel au carré d'une vitesse ; on trouve que cette vitesse est numériquement égale à celle de la lumière dans le vide, soit $\mu_o \epsilon_o = 1/c_o^2$.

2.2.2. Champ magnétique créé par des distributions continues de charges

Si les charges ponctuelles (en écoulement permanent) sont en très grand nombre, il est commode de considérer qu'elles forment une *distribution continue*. Examinons les différentes sortes de distributions possibles.

a/ linéique

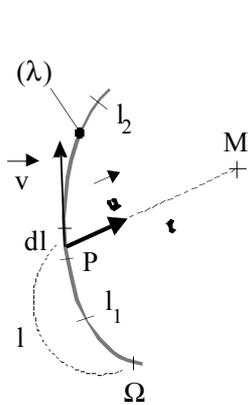
Soit des charges électriques en écoulement dans une portion $l_1 l_2$ de fil qui présente la charge λ par unité de longueur en un point P d'abscisse curviligne l (fig. 2.2.2.a). D'après 2.2.1.a, l'élément dl situé en P qui porte la charge λdl se déplaçant à la vitesse \vec{v} , crée en un point M situé à la distance r de P , l'élément de champ (équivalent à \vec{b}) :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\lambda dl \vec{v} \wedge \vec{u}}{r^2} \quad 2.2.2.a$$

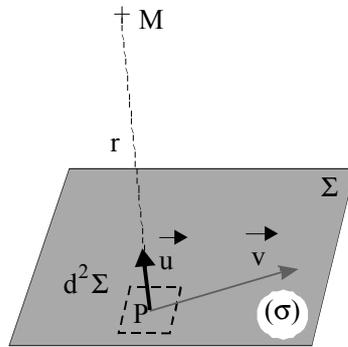
\vec{u} étant le vecteur unitaire fuyant dl et pointant vers M , donc de mêmes direction et sens que \overrightarrow{PM} . Le champ magnétique créé en M par la portion l_1l_2 , est alors :

$$\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{l_1}^{l_2} \frac{\lambda dl \vec{v} \wedge \vec{u}}{r^2} \quad 2.2.2.b$$

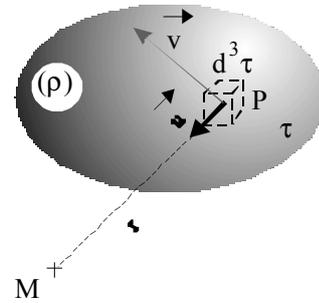
la valeur de r et la direction de \vec{u} dépendant, évidemment, de l'abscisse l de l'élément dl considéré sur le fil.



2.2.2.a



2.2.2.b



2.2.2.c

b/ surfacique

Soit des charges électriques en écoulement sur une surface Σ présentant la charge σ par unité de surface en un point P (fig. 2.2.2.b). L'élément de surface $d^2\Sigma$ situé en P qui porte la charge $\sigma d^2\Sigma$ se déplaçant à la vitesse \vec{v} , crée en un point M situé à la distance r de P , l'élément de champ (équivalent à \vec{b}) :

$$d^2\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\sigma d^2\Sigma \vec{v} \wedge \vec{u}}{r^2} \quad 2.2.2.c$$

\vec{u} étant le vecteur unitaire fuyant $d^2\Sigma$ et pointant vers M , donc de mêmes direction et sens que \overrightarrow{PM} . Le champ magnétique créé en M par la surface Σ , est alors :

$$\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\sigma d^2\Sigma \vec{v} \wedge \vec{u}}{r^2} \quad 2.2.2.d$$

la valeur de r et la direction de \vec{u} dépendant, nécessairement, de la position de P sur Σ .

c/ volumique

Soit, enfin, des charges électriques en écoulement dans un volume τ présentant la charge ρ par unité de volume en un point P (fig. 2.2.2.c). L'élément de volume $d^3\tau$ situé en P qui contient la charge $\rho d^3\tau$ se déplaçant à la vitesse \vec{v} , crée en un point M situé à la distance r de P , l'élément de champ (équivalent à \vec{b}) :

$$d^3\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\rho d^3\tau \vec{v} \wedge \vec{u}}{r^2} \quad 2.2.2.e$$

\vec{u} étant le vecteur unitaire fuyant $d^3\tau$ et pointant vers M , donc de mêmes direction et sens que \overrightarrow{PM} . Le champ magnétique créé en M par le volume τ , est alors :

$$\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \iiint_{\tau} \frac{\rho d^3\tau \vec{v} \wedge \vec{u}}{r^2} \quad 2.2.2.f$$

la valeur de r et la direction de \vec{u} dépendant, évidemment, de la position de P dans τ .

Remarque :

Rappelons que les expressions 2.2.2.a à 2.2.2.f ne sont utilisables que dans le cas de systèmes de charges en régime d'écoulement *permanent*.

2.2.3. Relations de Biot et Savart

La relation de Biot et Savart, est une expression du champ magnétique créé par des circuits filiformes (fermés) parcourus par des courants *constants*. Elle a été établie expérimentalement bien avant que l'on ait démontré que les courants électriques étaient des déplacements de particules chargées. L'expression 2.2.1.a du champ magnétique créé par une charge ponctuelle en mouvement, permet de retrouver immédiatement cette relation comme nous allons le voir.

En effet, soit dq un ensemble de charges > 0 (réelles ou équivalentes) réparties sur une longueur $|dl|$ d'un conducteur filiforme dans lequel elles progressent à la vitesse moyenne \vec{v} . Si cet ensemble de charges franchit une section droite d^2S du conducteur en un laps de temps dt , on peut écrire qu'au niveau de d^2S l'on a, d'une part, $\|\vec{v}\| = |dl|/dt$ par définition de la vitesse \vec{v} et, d'autre part, $I = dq/dt$ par définition de l'intensité I . D'après la relation 2.2.1.a, pendant le temps dt qui lui est nécessaire pour traverser d^2S , l'ensemble de charges dq crée en un point M à distance r de d^2S , l'élément de champ (voir la figure 2.2.3.a) :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{dq \vec{v} \wedge \vec{u}}{r^2} \quad \text{soit} \quad d\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I dt \vec{v} \wedge \vec{u}}{r^2} \quad \text{ou encore} \quad d\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I \frac{|dl|}{\|\vec{v}\|} \vec{v} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

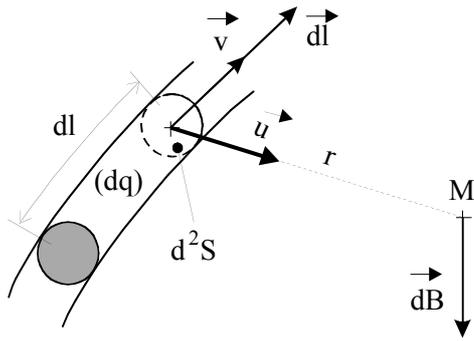
En notant \vec{dl} le vecteur $|dl| \vec{v}/\|\vec{v}\|$ (vecteur de module $|dl|$ et de mêmes direction et sens que \vec{v}), cette expression devient :

$$\boxed{d\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I \vec{dl} \wedge \vec{u}}{r^2}} \quad 2.2.3.a$$

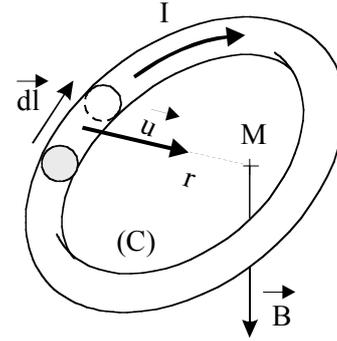
\vec{u} étant, évidemment, le vecteur unitaire fuyant dq et pointant vers M . Ainsi, le champ magnétique créé en M par la totalité d'un circuit filiforme fermé $[C]$ parcouru par le courant I , est (figure 3.2.3.b) :

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_o I}{4\pi} \oint_C \frac{\vec{dl} \wedge \vec{u}}{r^2}} \quad 2.2.3.b$$

la valeur de r et la direction de \vec{u} dépendant, évidemment, de la position de \vec{dl} sur $[C]$. Les expressions 2.2.3.a et 2.2.3.b constituent les *Relations (lois) de Biot et Savart*.



2.2.3.a



2.2.3.b

Remarques :

1. Rappelons que les *Relations (lois) de Biot et Savart* ne sont valables que dans le cas de courants *permanents* dans des circuits *fixes*.
2. Dans la relation 2.2.3.a, $[\vec{dl}, \vec{u}, d\vec{B}]$ forme un trièdre trirectangle *direct*.
3. La loi de Biot et Savart permet de calculer le champ magnétique produit par des courants qui parcourent des circuits filiformes de forme simple, tels un fil rectiligne infini, une spire circulaire, un solénoïde infini. La prise en compte des éventuelles symétries que présentent ces circuits, simplifie généralement beaucoup les calculs.

2.2.4. Retour sur les symétries

Dans le chapitre consacré à l'électrostatique, nous avons appliqué *directement* le principe de Curie (*les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits*) en admettant que les diverses symétries présentées par une répartition de charges, se retrouvaient nécessairement dans le champ \vec{E}_s qu'elles créent. Si une telle application *directe* est généralement possible pour un *vecteur vrai* comme \vec{E}_s , elle n'est pas toujours utilisable telle quelle pour un *pseudo-vecteur* comme le champ magnétique \vec{B} .

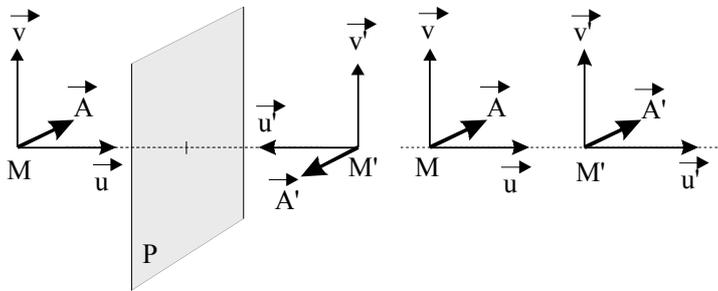
Etudions, pour nous en rendre compte, le comportement du pseudo-vecteur $\vec{A} = \vec{v} \wedge \vec{u}$, résultat du produit vectoriel des deux *vecteurs vrais* \vec{v} et \vec{u} , lorsque ceux-ci présentent diverses symétries particulières.

a/ Si \vec{v} et \vec{u} sont *symétriques* par rapport à un plan (P) , l'exemple de la figure 2.2.4.a montre que \vec{A} est transformé en l'*opposé de son symétrique* - soit en son « *antisymétrique* », par rapport à (P) .

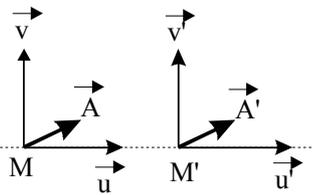
b/ Si \vec{v} et \vec{u} présentent une *symétrie de translation* selon $x'x$, l'exemple de la figure 2.2.4.b montre que \vec{A} possède aussi une *symétrie de translation* selon $x'x$.

c/ Si \vec{v} et \vec{u} présentent tous deux une *symétrie axiale autour de la direction $x'x$* , les exemples de la figure 2.2.4.c montrent que \vec{A} possède aussi une *symétrie axiale autour de $x'x$* , mais avec les particularités suivantes :

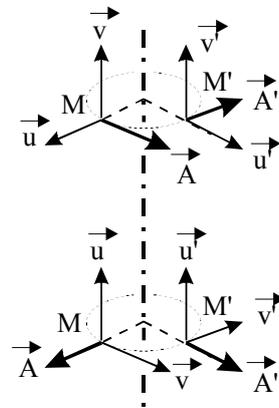
- lorsque \vec{v} et \vec{u} sont *méridiens* (c'est-à-dire dans des plans contenant l'axe $x'x$), \vec{A} est tangent à un cercle d'axe $x'x$ (c'est-à-dire *toroïdal*) ;
- si \vec{v} est tangent à un cercle d'axe $x'x$ (*toroïdal*) et \vec{u} *méridien*, \vec{A} est *méridien* ;



2.2.4.a



2.2.4.b



2.2.4.c

En conclusion :

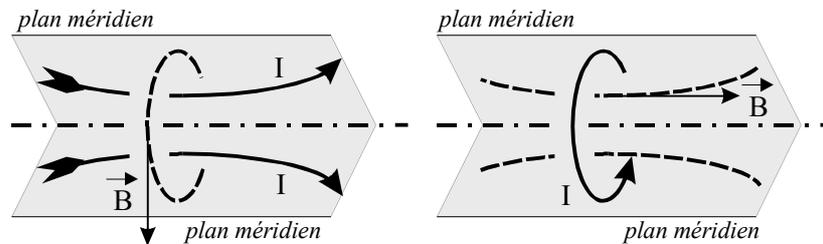
Les vecteurs vrais \vec{v} et \vec{u} pouvant jouer les rôles respectifs du vecteur élément de courant $I \vec{dl}$ et du vecteur unitaire \vec{u} de la première relation de Biot et Savart, les exemples précédents permettent de faire, pour le champ magnétique \vec{B} , les généralisations suivantes :

a/ Un plan de **symétrie** pour un courant est plan d'**antisymétrie** pour le champ \vec{B} qu'il crée.

b/ Un axe de **symétrie de translation** pour un courant est axe de **symétrie de translation** pour le champ \vec{B} qu'il crée.

c/ Un axe de **symétrie de rotation** pour un courant est axe de **symétrie de rotation** pour le champ \vec{B} qu'il crée, et, dans le cas où (voir les figures ci-dessous) :

- les lignes de courant sont méridiennes (c'est-à-dire, dans les plans contenant l'axe de symétrie de rotation), les lignes de champ produites sont des cercles autour de l'axe ;
- les lignes de courant sont des cercles autour de l'axe, les lignes de champ produites sont méridiennes (dans les plans contenant cet axe).



Remarque :

Deux autres règles de symétrie complètent utilement les précédentes :

- Tout champ magnétique pris en un point d'un plan de **symétrie** des courants qui le créent, est orthogonal à ce plan.
- Tout champ magnétique pris en un point d'un plan d'**antisymétrie** des courants qui le créent, appartient à ce plan.

2.2.5. Calcul du champ magnétique dans quelques cas simples

- Champ créé au voisinage d'un courant rectiligne infini

Dans un repère $[Oxyz]$, on considère un fil rectiligne infini de section négligeable, d'axe $\vec{z}'z'$, parcouru par un courant *stationnaire* d'intensité I . Déterminons le champ magnétique produit en un point M de coordonnées $(\rho = a, \theta, z = 0)$, du plan $[Oxy]$. D'après 2.2.3.a, le champ

créé en M par un élément dl de courant situé à une distance r , est (figure 2.2.5.a) :

$$\vec{dB} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I \vec{dl} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

Notons α l'angle (\vec{u}_ρ, \vec{u}) ; alors :

$$\vec{dl} = dz \vec{k} \text{ et } \vec{u} = \cos \alpha \vec{u}_\rho - \sin \alpha \vec{k}, \text{ d'où } \vec{dl} \wedge \vec{u} = dz \cos \alpha \vec{k} \wedge \vec{u}_\rho = dz \cos \alpha \vec{u}_\theta .$$

Par conséquent, quel que soit θ :

$$\vec{dB} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I dz \cos \alpha}{r^2} \vec{u}_\theta .$$

Maintenant, pour déterminer \vec{B} créé par le fil en entier, il faut sommer les champs \vec{dB} produits par tous les éléments dl . Il est commode de choisir α comme variable et d'écrire ainsi :

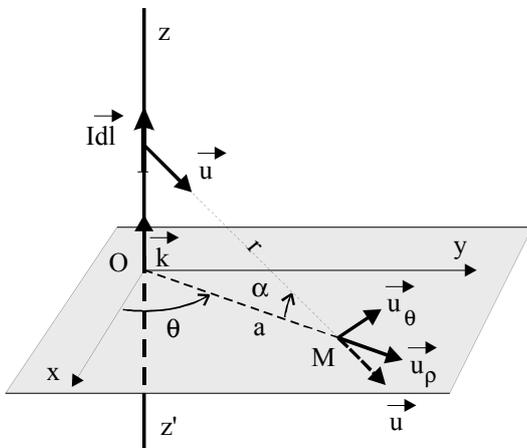
$$z = a \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow dz = a \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} \quad \text{et} \quad r = \frac{a}{\cos \alpha} ;$$

donc :

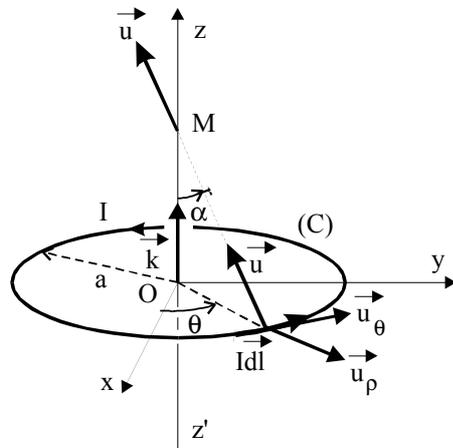
$$\vec{dB} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I}{a} \cos \alpha d\alpha \vec{u}_\theta$$

et

$$\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I}{a} \vec{u}_\theta \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \alpha d\alpha \quad \text{soit} \quad \vec{B} = \frac{\mu_o}{2\pi} \frac{I}{a} \vec{u}_\theta \quad 2.2.5.a$$



2.2.5.a



2.2.5.b

Remarques :

1. \vec{B} est bien toroïdal (à lignes de champ circulaires) d'axe $\vec{z}'z'$ comme attendu d'après les propriétés de symétrie du paragraphe précédent.
2. Le sens de \vec{B} est le sens de rotation d'un tire-bouchon progressant comme le courant.

- Champ créé sur l'axe d'un courant circulaire

Dans un repère $[Oxyz]$, on considère une spire circulaire (C) de rayon a et centre O , située dans le plan $[Oxy]$. Elle est parcourue par un courant d'intensité I , dans le sens direct.

Déterminons le champ \vec{B} créé en un point M de cote z de l'axe $\vec{z}'z'$. D'après 2.1.6.a, un élément $d\vec{l}$ de la spire produit en M qui se trouve à la distance r (figure 2.2.5.b) :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

avec $d\vec{l} = a d\theta \vec{u}_\theta$, $\vec{u} = -\sin\alpha \vec{u}_\rho + \cos\alpha \vec{k}$ et $r = \frac{a}{\sin\alpha}$, α étant l'angle (\vec{u}, \vec{k}) .

Par conséquent :

$$d\vec{l} \wedge \vec{u} = -a d\theta \sin\alpha \vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_\rho + a d\theta \cos\alpha \vec{u}_\theta \wedge \vec{k} = a d\theta \sin\alpha \vec{k} + a d\theta \cos\alpha \vec{u}_\rho$$

et :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I \sin^2\alpha}{a^2} (a d\theta \sin\alpha \vec{k} + a d\theta \cos\alpha \vec{u}_\rho);$$

$$\text{d'où : } \vec{B} = \int_{(C)} d\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I}{a} \left[\sin^3\alpha \vec{k} \int_0^{2\pi} d\theta - \cos\alpha \sin^2\alpha \int_0^{2\pi} \vec{u}_\rho d\theta \right] = \frac{\mu_o}{2a} \sin^3\alpha \vec{k} \quad 2.2.5.b$$

puisque

$$\int_0^{2\pi} \vec{u}_\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta \vec{i} + \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta \vec{j} = 0$$

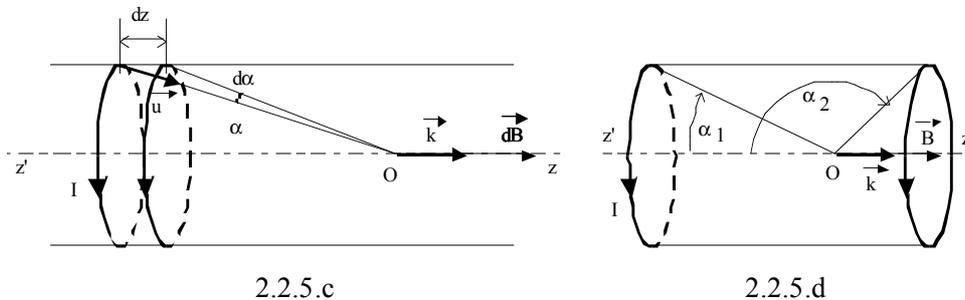
Le champ \vec{B} produit est donc colinéaire à \vec{k} , ce qui ne surprend pas étant donnée la forme toroïdale d'axe $\vec{z}'z$, du courant d'intensité I (voir le § 2.2.4).

Remarques :

1. Le sens de \vec{B} est celui de progression d'un tire-bouchon qui tournerait dans le sens du courant parcourant la spire.
2. On appelle *face nord* d'une spire plane parcourue par un courant, celle que semble fuir le champ magnétique qu'elle produit sur son axe ; l'autre face est dite *sud*. On utilise le même critère pour la dénomination des pôles *nord* et *sud* d'un aimant.
3. Si on avait choisi I dans le sens rétrograde, l'intégration sur (C) se faisant en sens inverse, l'expression trouvée pour \vec{B} aurait été du signe opposé.

- Champ créé sur l'axe d'un solénoïde

Un solénoïde est constitué de l'enroulement d'un conducteur filiforme autour d'un cylindre. On suppose ce conducteur assez mince et l'enroulement suffisamment serré pour que le solénoïde puisse être considéré comme une juxtaposition de *spires* indépendantes, à raison de N spires par unité de longueur, chacune étant parcourue par un courant d'intensité constante I . On veut déterminer le champ magnétique sur l'axe $\vec{z}'z$ d'un tel solénoïde, supposé de rayon a et de longueur quelconque.



Sur une longueur dz de l'axe sont bobinées $N dz$ spires parcourues, chacune, par un courant d'intensité I , cet ensemble étant assimilable à *une spire unique* parcourue par le courant

$N I dz$ (voir la figure 2.2.5.c). Le champ que cette spire équivalente crée sur l'axe est, d'après le § précédent :

$$\vec{dB} = \frac{\mu_o N I dz}{2a} \sin^3 \alpha \vec{k}$$

En posant alors $(\vec{k}, \vec{u}) = \alpha$ angle orienté d'origine \vec{k} , on a (puisque $0 < \alpha < \pi/2$ lorsque $z < 0$) :

$$z = -\frac{a}{\operatorname{tg} \alpha} \Rightarrow dz = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \frac{a}{\operatorname{tg}^2 \alpha} d\alpha = \frac{a}{\sin^2 \alpha} d\alpha .$$

Donc :

$$\vec{dB} = \frac{\mu_o N I}{2} \sin \alpha d\alpha \vec{k}$$

et, le champ \vec{B} au point O origine de l'axe, d'où les rayons de la première et de la dernière spire sont vus respectivement sous les angles α_1 et $\pi - \alpha_2$ (figure 2.2.5.d), est tel que :

$$\vec{B} = \frac{\mu_o N I}{2} \vec{k} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_o N I}{2} \vec{k} [-\cos \alpha]_{\alpha_1}^{\alpha_2} = \frac{\mu_o N I}{2} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \vec{k} \quad 2.2.5.c$$

Si le solénoïde est de longueur *infinie*, alors $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = \pi$, et $\vec{B} = \mu_o N I \vec{k}$.

Travail Personnel

1. Savoir retrouver les relations 2.2.3.a et 2.2.3.b à partir de la relation 2.2.1.a, ainsi que les expressions 2.2.5.a, 2.2.5.b et 2.2.5.c.

2.3. Circulation du champ magnétique et dipôle magnétique

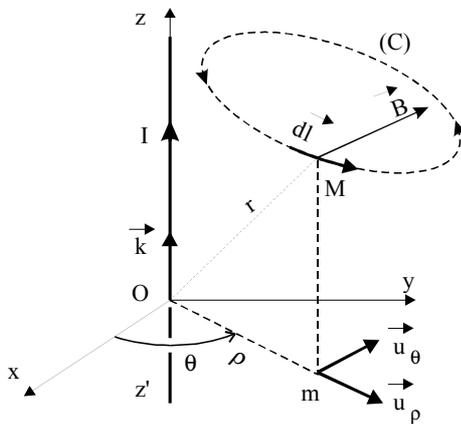
2.3.1. Théorème d'Ampère

Nous avons vu, au § 2.2.5., qu'un fil rectiligne infini disposé selon l'axe $\vec{z}'z'$ d'un repère $[Oxyz]$, crée à une distance ρ lorsqu'il est parcouru par un courant d'intensité I et de même sens que $\vec{z}'z'$, un champ \vec{B} s'écrivant, dans les coordonnées cylindriques :

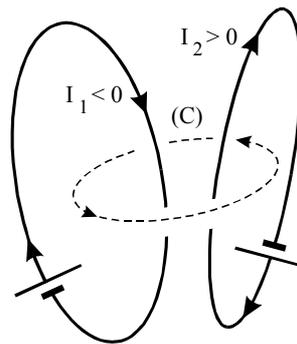
$$\vec{B} = \frac{\mu_o I}{2\pi \rho} \vec{u}_\theta$$

Considérons, alors, au voisinage de ce fil, un *contour fermé* (C) de forme quelconque. Dans les coordonnées choisies (cylindriques), un vecteur trajet infinitésimal le long de (C) s'écrit $\vec{dl} = d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{k}$ et la *circulation* de \vec{B} sur (C) est :

$$\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} = \frac{\mu_o I}{2\pi} \oint_C \frac{1}{\rho} \vec{u}_\theta \cdot (\rho d\theta \vec{u}_\theta) = \mu_o I \oint_C \frac{d\theta}{2\pi}$$



2.3.1.a



2.3.1.b

Il est alors facile de voir (figure 2.3.1.a) que si (C) ne fait pas le tour de $\vec{z}'z'$, l'intégrale de la relation précédente est nulle ; tandis que s'il en fait N fois le tour, elle est telle que :

$$\oint_C d\theta / 2\pi = \pm N ,$$

le signe *plus* correspondant au cas où le sens de parcours de (C) est *direct* (θ toujours croissant), et le signe *moins* au cas où il est *rétrograde* (θ toujours décroissant).

Le *théorème d'Ampère* (non établi ici) qui permet de généraliser ce résultat à des fils conducteurs de forme quelconque, énonce que :

La circulation de \vec{B} le long d'un contour (C) orienté et fermé, est égale à μ_0 fois la somme algébrique des intensités des courants traversant toute surface délimitée par (C) .

Il s'écrit donc comme :

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \pm \mu_0 \sum_{i=1}^n I_i \quad 2.3.1.$$

en adoptant le signe *plus* si le sens du courant est celui de progression d'un tire bouchon tournant dans le sens *arbitrairement* choisi sur (C) , et le signe *moins* dans le cas contraire (figure 2.3.1.b).

Remarques :

1. Le théorème d'Ampère n'est valable qu'en régime d'écoulement *permanent* (courants d'intensités constantes).
2. (C) est souvent appelé *contour d'Ampère*.
3. Il y a, en définitive, trois méthodes pour déterminer le champ magnétique :
 - la formule de Biot et Savart, qui n'est utilisable que s'il est possible d'additionner les éléments de champ $d\vec{B}$ qu'elle permet de calculer ;
 - la loi de conservation du flux ;
 - le théorème d'Ampère, lorsqu'on peut calculer la circulation du champ sur un contour choisi.

2.3.2. Application au solénoïde infini

Soit un solénoïde de rayon a et de longueur infinie, constitué de l'enroulement d'un conducteur filiforme autour d'un cylindre d'axe $\vec{z}'z'$, à raison de N spires par unité de longueur. Chaque spire étant parcourue par un courant d'intensité constante I , on veut déterminer le champ magnétique *en tout point* (celui sur $\vec{z}'z'$ ayant été calculé au § 2.2.5.).

On envisage, pour cela, un contour d'Ampère rectangulaire (ABCD) représenté sur la figure 2.3.2.a à l'intérieur (i) et à l'extérieur (e) du solénoïde.

Le contour (ABCD) n'étant traversé par aucune spire, on a *dans les deux cas* selon le théorème d'Ampère :

$$\int_{AB} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{BC} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{CD} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{DA} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

Comme le courant est *circulaire* à *symétrie de rotation* d'axe $\vec{z}'z'$ et présente une *symétrie de translation* de même axe, les lignes de champ sont *méridiennes* à *symétrie de rotation* autour de $\vec{z}'z'$ et *de translation* selon ce même axe (voir le § 2.2.4.). Le champ \vec{B} possède, par conséquent, une *symétrie cylindrique* d'axe $\vec{z}'z'$ et a, de ce fait, même valeur à une même distance de $\vec{z}'z'$, quel que soit z ; d'où :

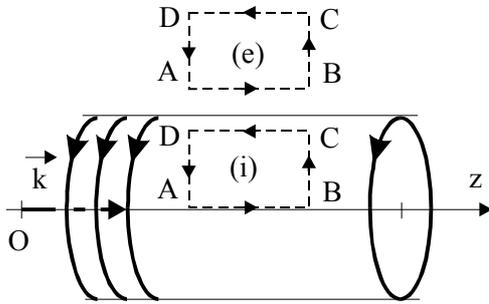
$$\int_{BC} \vec{B} \cdot d\vec{l} = - \int_{DA} \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

Il reste donc :

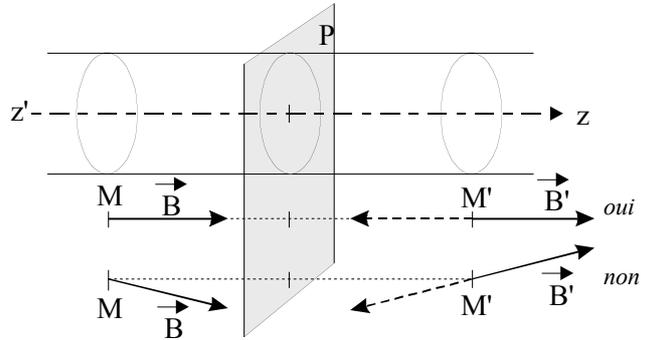
$$\int_{AB} \vec{B} \cdot d\vec{l} = - \int_{CD} \vec{B} \cdot d\vec{l}, \text{ soit } \vec{B}_{AB} \cdot \int_{AB} d\vec{l} = - \vec{B}_{CD} \cdot \int_{CD} d\vec{l}, \text{ ou bien } \vec{B}_{AB} \cdot \vec{AB} = - \vec{B}_{CD} \cdot \vec{CD}.$$

Le courant étant, par ailleurs, symétrique par rapport à tout plan (P) orthogonal à $\vec{z}'z'$, tout plan orthogonal à $\vec{z}'z'$ est plan d'*antisymétrie* pour \vec{B} (§ 2.2.4.), ce qui impose à ce champ d'être *parallèle* à $\vec{z}'z'$ (figure 2.3.2.b). Ainsi, comme $\vec{CD} = -\vec{AB}$, la relation précédente permet d'affirmer que $\vec{B}_{AB} = \vec{B}_{CD}$ (affirmation qui eut été impossible si les *directions* de \vec{B}_{AB}

et \vec{B}_{CD} n'avaient pas été les mêmes). Par conséquent, le champ \vec{B} est uniforme à l'intérieur comme à l'extérieur du solénoïde ; mais :



2.3.2.a



2.3.2.b

- à l'intérieur il est nécessairement égal à sa valeur calculée sur l'axe au § 2.2.5., qui est :

$$\mu_o N I \vec{k} \quad 2.3.2.$$

- à l'extérieur il est nécessairement nul si l'on admet, qu'infiniment loin du solénoïde, il est nul.

Remarque :

On aboutit plus rapidement au résultat précédent en utilisant la remarque du § 2.2.4. En effet, tout plan orthogonal à l'axe du solénoïde est plan de symétrie pour le courant ; il s'ensuit que le champ en tout point d'un tel plan lui est orthogonal, donc parallèle à l'axe. Il en va de même en tout autre point, puisque tout point de l'espace est localisable dans un plan orthogonal à l'axe. Enfin, du fait de la symétrie cylindrique, le champ ne dépend que de sa distance à l'axe.

2.3.3. Circulation élémentaire du champ magnétique

On a vu, § 2.2.5., que le champ \vec{B} produit en un point M de cote z de l'axe $\vec{z}'z$ d'une spire circulaire (C) de rayon a , parcourue par un courant de sens direct et d'intensité I , était :

$$\vec{B} = \frac{\mu_o I}{2 a} \sin^3 \alpha \vec{k} \quad \text{avec} \quad \sin \alpha = a / \sqrt{a^2 + z^2} .$$

Par conséquent :

$$\vec{B} = \frac{\mu_o I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \vec{k}.$$

Or, l'angle solide Ω sous lequel est vue (C) depuis M, est $\Omega = 2\pi(1 - \cos\alpha)$ avec $\cos\alpha = z/\sqrt{a^2 + z^2}$ (figure 2.3.3.). Soit, alors, $\overline{MM'} = dz \vec{k}$ un déplacement infinitésimal de M sur $\vec{z'z}$; il entraîne une variation (> 0 ou < 0) $\overline{d\Omega}$ de Ω telle que :

$$\overline{d\Omega} = d \left[2\pi \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \right] = -2\pi d \left(\frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right)$$

d'où :

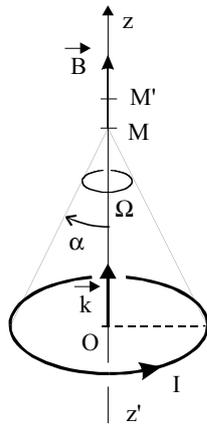
$$\overline{d\Omega} = -2\pi \frac{1}{a^2 + z^2} \left[\sqrt{a^2 + z^2} - z \frac{2z}{2\sqrt{a^2 + z^2}} \right] dz = -2\pi \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} dz$$

La circulation élémentaire de \vec{B} le long de $\overline{MM'}$, peut donc s'écrire :

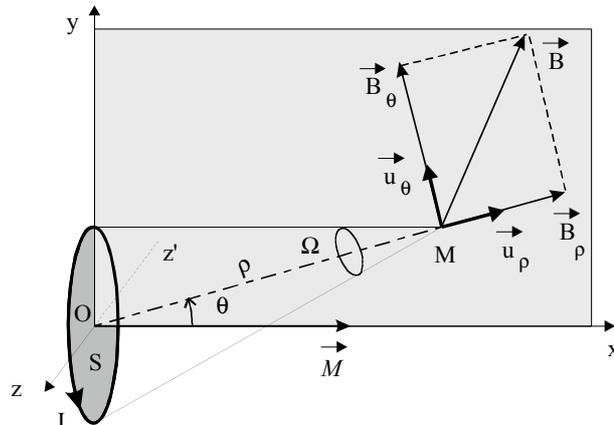
$$\vec{B} \cdot \overline{MM'} = \left[\frac{\mu_o I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \vec{k} \right] \cdot [dz \vec{k}]$$

soit :

$$\vec{B} \cdot \overline{MM'} = -\frac{\mu_o I}{4\pi} \overline{d\Omega} \quad 2.3.3.$$



2.3.3.



2.3.4.

relation particulièrement simple, dont on peut montrer qu'elle reste vraie lorsque M n'est plus sur l'axe de la spire et lorsque la direction de $\overrightarrow{MM'}$ est quelconque.

2.3.4. Le dipôle magnétique

Pour rendre compte des phénomènes magnétiques, on a adopté au § 2.1.2. l'hypothèse de l'existence dans la matière de courants circulaires de très petit rayon, parcourus par des courants d'intensité constante I , ou *ampériens*. De tels circuits constituent ce que l'on appelle des *dipôles magnétiques*, dont nous allons déterminer le champ qu'ils créent à grande distance.

- Champ créé par un dipôle magnétique

Soit un dipôle magnétique constitué d'une spire de surface S , d'axe $\overrightarrow{x'x}$ et de centre O , parcourue par un courant constant d'intensité I . Selon 2.3.3., il crée en un point M repéré par ses coordonnées polaires (ρ, θ) dans le plan $[Oxy]$, un champ magnétique \vec{B} dont la circulation le long de $\overrightarrow{MM'}$ est (voir la figure 2.3.4.) :

$$\vec{B} \cdot \overrightarrow{MM'} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} d\Omega$$

La distance ρ étant supposée grande devant le rayon de la spire, on peut admettre que cette dernière est vue depuis M sous le petit angle solide :

$$\Omega = \frac{S \cos \theta}{\rho^2} \quad \text{d'où} \quad d\Omega = \frac{\partial \Omega}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} d\theta = -2 \frac{S \cos \theta}{\rho^3} d\rho - \frac{S \sin \theta}{\rho^2} d\theta .$$

On a donc :

$$\vec{B} \cdot \overrightarrow{MM'} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2 SI \cos \theta}{\rho^3} d\rho + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{SI \sin \theta}{\rho^2} d\theta . \quad 2.3.4.a$$

Or $\vec{B} = B_\rho \vec{u}_\rho + B_\theta \vec{u}_\theta$ et $\overrightarrow{MM'} = d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\theta \vec{u}_\theta$. Par conséquent, on a encore :

$$\vec{B} \cdot \overrightarrow{MM'} = B_\rho d\rho + \rho B_\theta d\theta ;$$

d'où, selon 2.3.4.a. :

$$B_\rho = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{2 SI \cos\theta}{\rho^3} \quad \text{et} \quad B_\theta = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{SI \sin\theta}{\rho^3}, \quad 2.3.4.b$$

et :

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{SI}{\rho^3} \sqrt{4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \frac{\mu_o}{4\pi} SI \frac{\sqrt{3 \cos^2 \theta + 1}}{\rho^3}$$

- Moment magnétique d'un dipôle

On définit le *moment magnétique* d'un dipôle (magnétique) comme le (pseudo) vecteur :

$$\vec{M} = SI \vec{N}$$

\vec{N} étant un vecteur unitaire normal au plan de la spire, de même sens que celui dans lequel progresse un tire-bouchon tournant comme le courant I . Ainsi, les relations 2.3.4.b peuvent-elles se réécrire :

$$B_\rho = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{2 M \cos\theta}{\rho^3} \quad \text{et} \quad B_\theta = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{M \sin\theta}{\rho^3} \quad 2.3.4.c$$

Remarque :

On vérifie que :

$$\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{1}{\rho^3} \left[\vec{e}_\rho (\vec{M} \cdot \vec{u}_\rho) - \vec{M} \right]$$

2.3.5. Le modèle du dipôle magnétique en physique

- Niveau microscopique

Le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène consiste en un électron de charge $-e$ et masse m_e , en mouvement circulaire uniforme de rayon a_o et de période T , autour d'un proton. Si ν est la fréquence du passage de l'électron en un même point de sa trajectoire (donc, le nombre de fois qu'il boucle celle-ci par seconde), son mouvement équivaut à un courant d'intensité $I = e\nu = e/T$ parcourant (en sens inverse de celui du déplacement de l'électron) une spire fictive de rayon a_o . En notant \vec{N} l'unitaire normal au plan de cette spire (orienté dans le sens

de progression d'un tire-bouchon qui tournerait comme le courant) et $\omega = 2\pi/T$ la pulsation du mouvement, l'atome de Bohr présente un moment magnétique intrinsèque :

$$\vec{M} = SI \vec{N} = \pi a_o^2 \frac{e}{T} \vec{N} = a_o^2 \frac{e \omega}{2} \vec{N} = \frac{e}{2 m_e} (m_e \omega a_o^2 \vec{N}) = \frac{e}{2 m_e} \vec{L}$$

la grandeur \vec{L} étant l'opposé du *moment cinétique* réel de l'électron (puisque ce dernier tourne en sens inverse de I). Le rapport $e/2 m_e$ est appelé *facteur gyromagnétique*.

A l'instar de l'hydrogène, beaucoup d'atomes présentent un moment magnétique, mais, au sein d'une substance constituée de tels atomes, ces moments sont souvent orientés aléatoirement, et le champ résultant produit à distance est nul. L'application d'un champ magnétique *extérieur* sur une substance provoque, d'une part, une déformation des orbites électroniques de ses atomes et, d'autre part, l'alignement selon sa direction et son sens, de leur moment magnétique (s'ils en possèdent un, bien évidemment). De la déformation des orbites résulte, au niveau de chaque atome, l'apparition d'un moment magnétique *induit* (voir le module 2.5. sur l'*induction*) qui s'oppose au champ extérieur appliqué et, donc, en amoindrit l'intensité : c'est le *diamagnétisme*. Mais, lorsque les atomes possèdent un moment magnétique, le *diamagnétisme* est masqué par l'effet d'alignement qui lui, au contraire, renforce le champ appliqué : c'est le *paramagnétisme*. Enfin, dans des substances telles que le fer, le nickel, le cobalt ou le gadolinium, les moments magnétiques des atomes peuvent présenter des directions communes stables et produire ainsi, à distance, un champ permanent : c'est le *ferromagnétisme*.

- Niveau macroscopique

On constate l'existence d'un champ magnétique sur les planètes et les étoiles ; la cause (présence d'hypothétiques courants de particules chargées circulant dans le cœur des astres) n'en est pas encore clairement élucidée.

- Ces champs peuvent fluctuer périodiquement et même *s'inverser* ; la dernière inversion connue du champ terrestre date de 700 000 ans, tandis que le champ solaire échange ses polarités régulièrement tous les 11 ans.
- Le moment magnétique d'un astre n'est généralement pas aligné avec son moment cinétique (de rotation).

2.4. Forces et énergie magnétique

2.4.1. Travail de la force magnétique

Nous avons vu, § 2.1.3., qu'une charge q ponctuelle, animée d'une vitesse \vec{v} dans un repère $[R]$ d'un référentiel galiléen et se trouvant en un point où règne le champ magnétique \vec{B} , subissait la force *magnétique* :

$$\vec{f}_m = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Cette force magnétique présente la propriété de ne *pas produire de travail*. Soit, en effet, $\overline{MM'}$ l'élément vectoriel de trajectoire décrit par q pendant dt . Alors, comme $\vec{v} = \overline{MM'} / dt$, le travail produit sur q par \vec{f}_m au cours de ce trajet infinitésimal peut s'écrire, par propriété du produit mixte :

$$\delta W = \vec{f}_m \cdot \overline{MM'} = q \left(\frac{\overline{MM'}}{dt} \wedge \vec{B} \right) \cdot \overline{MM'} = q \left(\overline{MM'} \wedge \frac{\overline{MM'}}{dt} \right) \cdot \vec{B} = 0$$

2.4.2. Force de Laplace sur un circuit

Nous avons vu au § 3.1.3., que la force subie par une charge ponctuelle q se déplaçant à la vitesse \vec{v} dans une région de l'espace où règnent un champ électrique \vec{E} et un champ magnétique \vec{B} , est de la forme :

$$\vec{f} = q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

et s'appelle *force de Lorentz*.

Considérons, maintenant, le cas simple d'un milieu conducteur solide dont les charges mobiles, supposées toutes du même type q , présentent une densité volumique n et se déplacent à la vitesse (d'ensemble) \vec{v} . Le conducteur étant globalement neutre, un petit volume $d^3\tau$ donné contient à la fois $n d^3\tau$ charges q identiques et *mobiles*, et $n d^3\tau$ charges $-q$ identiques et *fixes*; ces dernières étant, par exemple, les ions en réseau dont proviennent les charges mobiles (électrons libres). La force de Lorentz *totale* qui s'exerce sur $d^3\tau$ est donc :

$$\overline{d^3 f} = n d^3\tau q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) + n d^3\tau (-q) (\vec{E} + \vec{0} \wedge \vec{B}) = n d^3\tau q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

ce que l'on peut encore écrire, en introduisant le vecteur densité de courant $\vec{j} = n q \vec{v}$:

$$\overrightarrow{d^3 f} = d^3 \tau \vec{j} \wedge \vec{B}$$

Soit, alors, un circuit fermé constitué d'un conducteur filiforme de section *droite* s , parcouru par un courant d'intensité I . Soit dl un élément de ce circuit, de volume $d\tau = s dl$, auquel on attache le vecteur élémentaire \vec{dl} de module dl et de même sens que le vecteur densité de courant local \vec{j} (figure 2.4.2.). Alors, en notant j le module de \vec{j} , on peut poser $\vec{j} dl = j \vec{dl}$ et réécrire la relation précédente comme :

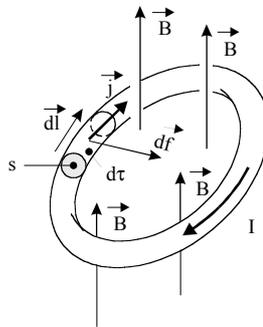
$$d\vec{f} = s dl \vec{j} \wedge \vec{B} = s j \vec{dl} \wedge \vec{B}$$

soit :

$$d\vec{f} = I \vec{dl} \wedge \vec{B}$$

2.4.2.a

puisque $j s = I$ par définition.



2.4.2.

La force qui s'exerce sur la totalité du circuit est donc :

$$\vec{f} = I \oint_{\text{circuit}} \vec{dl} \wedge \vec{B} \tag{2.4.2.b}$$

Les relations 2.4.2.a et b, établies ici dans un cas simple, ont une validité générale. Elles constituent la *Loi de Laplace* et sont les expressions de forces dites *de Laplace*.

Remarques :

1. La loi de Laplace n'est vérifiée que pour des circuits, ou éléments de circuits, parcourus par des courants en régime *permanent*.
2. La force $d\vec{f}$ est *mesurable*. Il ne s'agit donc pas d'un artifice de calcul permettant de déterminer la résultante \vec{f} qui, elle, est appliquée au *centre d'inertie* du circuit.

2.4.3. Théorème de Maxwell, énergie potentielle d'interaction magnétique

Selon la Loi de Laplace (relation 2.4.2.b), un circuit fermé parcouru par un courant et plongé dans le champ magnétique créé par un second circuit, subit une force d'interaction résultante \vec{f} . Si, sous l'effet de \vec{f} , le premier circuit se déplace, la force d'interaction \vec{f} dépense un travail qui est nécessairement prélevé sur l'énergie d'ensemble des deux circuits. C'est cette énergie d'ensemble, appelée *énergie potentielle d'interaction magnétique*, qu'en définitive nous cherchons à exprimer ici.

- Théorème (du flux coupé) de Maxwell

Considérons un circuit fermé filiforme *indéformable* (ou très lentement déformable) parcouru par un courant *constant* d'intensité I , plongé dans un champ \vec{B} maintenu également *constant*. D'après 2.4.2.a, la force d'interaction électromagnétique qui s'exerce sur chaque élément \vec{dl} du circuit est $d\vec{f} = I \vec{dl} \wedge \vec{B}$ (le sens de ces éléments ayant été choisi identique à celui du courant). S'il en résulte, pour chaque élément, un déplacement infinitésimal $\overrightarrow{MM'}$ particulier (infiniment *lent* pour ne pas créer de *fém d'induction*, comme nous le verrons plus loin), les forces d'interaction électromagnétique ont *dépensé* le travail :

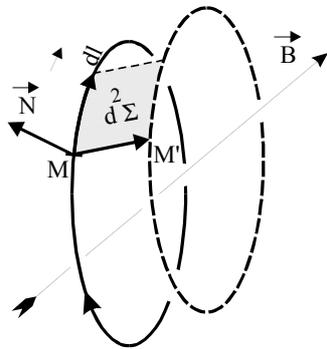
$$\delta W = \oint_{\text{circuit}} (\vec{dl} \wedge \vec{B}) \overrightarrow{MM'} = I \oint_{\text{circuit}} (\overrightarrow{MM'} \wedge \vec{dl}) \vec{B}$$

Or $\overrightarrow{MM'} \wedge \vec{dl}$ peut s'écrire $\vec{N} d^2\Sigma$, $d^2\Sigma$ étant la surface du parallélogramme construit sur les deux vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et \vec{dl} , et \vec{N} le vecteur unitaire normal de même sens que

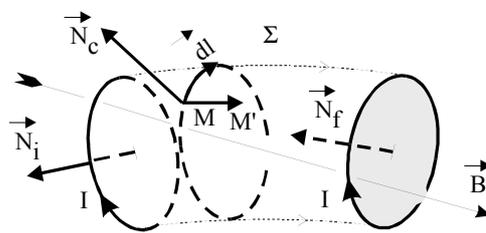
$\overrightarrow{MM'} \wedge \overrightarrow{dl}$ (voir la figure 2.4.3.a). Par conséquent, $(\overrightarrow{MM'} \wedge \overrightarrow{dl}) \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{N} d^2\Sigma$ représente le flux $d^2\Phi$ de \vec{B} à travers l'élément de surface $\overrightarrow{MM'} \wedge \overrightarrow{dl}$ balayé par le déplacement, et l'on peut écrire :

$$\delta W = I \oint_{\text{circuit}} d^2\Phi = I d\Phi \tag{2.4.3.a}$$

si $d\Phi$ représente le flux de \vec{B} à travers la surface infinitésimale balayée par la totalité du circuit au cours de son déplacement élémentaire. $d\Phi$ est encore appelé flux *coupé* par le circuit et noté $d\Phi_C$.



2.4.3.a



2.4.3.b

Le travail dépensé par les forces d'interaction magnétique lorsque le circuit effectue un déplacement *fini*, peut être obtenu en intégrant la relation précédente. Alors, si Φ_C est le flux total coupé par le circuit au cours de ce déplacement, on a :

$$W = I \Phi_C \tag{2.4.3.b}$$

Ce résultat constitue le *Théorème de Maxwell* qui s'énonce :

Le travail dépensé par les forces d'interaction électromagnétique qui s'exercent sur un circuit fermé indéformable parcouru par un courant constant et plongé dans un champ magnétique extérieur maintenu constant, est égal à l'intensité du courant dans le circuit, multipliée par le flux coupé au cours du déplacement infiniment lent effectué par le circuit.

L'orientation des vecteurs unitaires normaux à la surface balayée par le circuit - qui commande le signe du flux coupé - est définie par le trièdre direct $(\overrightarrow{MM'}, \vec{dl}, \vec{N})$ correspondant à la part infinitésimale $\overrightarrow{MM'}$ du déplacement (\vec{dl} ayant même sens que le courant).

- Théorème (de la variation du flux embrassé) de Maxwell

La propriété que possède le flux du champ magnétique d'être *conservatif* (son flux *sortant* d'une surface fermée est toujours nul), entraîne que le flux *coupé* par le circuit au cours d'un déplacement, est égal à la *variation*, au cours de ce déplacement, du flux *embrassé* par le circuit, c'est-à-dire du flux qui traverse le circuit lui-même. Pour cela, considérons la surface *fermée* Σ constituée de la surface décrite par le circuit dans son déplacement, et des deux surfaces s'appuyant sur le circuit dans sa position initiale et dans sa position finale. Convenons, alors, de noter (figure 2.4.3.b) :

- Φ_C le flux *coupé* par le circuit au cours de son déplacement, le sens de l'unitaire normal \vec{N}_C qui permet de le calculer, étant défini par le trièdre direct $(\overrightarrow{MM'}, \vec{dl}, \vec{N}_C)$;
- Φ_i le flux *embrassé* par le circuit dans sa position *initiale*, le sens de l'unitaire normal \vec{N}_i qui permet de le calculer, étant celui de progression d'un tire-bouchon tournant comme le courant ;
- Φ_f le flux *embrassé* par le circuit dans sa position *finale*, le sens de l'unitaire normal \vec{N}_f qui permet de le calculer, étant toujours celui de progression d'un tire-bouchon tournant comme le courant.

Le flux *sortant* de Σ devant être nul, il est facile de se rendre compte que, pour tous les cas possibles de sens de courant et de déplacement du circuit, on a toujours :

$$\Phi_C = \Phi_f - \Phi_i$$

Ainsi, le théorème de Maxwell peut-il être réécrit comme :

$$W = I (\Phi_f - \Phi_i)$$

2.4.3.c

Mise sous forme différentielle, cette relation devient :

$$\delta W = I d\Phi_e \quad 2.4.3.d$$

expression de même forme que 2.4.3.a , mais dans laquelle $d\Phi_e$ représente la *variation*, au cours du déplacement (supposé infiniment lent), du flux *embrassé*.

- *Energie potentielle d'interaction magnétique*

Puisqu'au cours du déplacement d'un circuit dans un champ, les forces d'interaction magnétique *dépensent* le travail donné par la relation 2.4.3.c, l'énergie E_p de l'*ensemble* du système champ - circuit varie de la quantité *opposée*, c'est-à-dire de :

$$\Delta E_p = -I (\Phi_f - \Phi_i) = -I \Phi_f - (-I \Phi_i) = E_{pf} - E_{pi}$$

On définit ainsi l'*énergie potentielle (d'interaction) magnétique* du système champ - circuit, comme la grandeur :

$$E_p = -I \Phi_e + cte \quad 2.4.3.e$$

Φ_e étant le flux qu'*embrasse* le circuit (grandeur algébrique dont le signe dépend du sens de l'unitaire normal à la surface s'appuyant sur le circuit, sens défini lui-même comme celui de progression d'un tire-bouchon tournant comme le courant). Sous forme différentielle, cette relation s'écrit :

$$dE_p = -I d\Phi_e \quad 2.4.3.f$$

- *Règle du flux (embrassé) maximum*

Tout système ayant tendance à évoluer spontanément vers son *minimum d'énergie potentielle*, un circuit parcouru par un courant et laissé à lui-même dans un champ magnétique, prendra un mouvement entraînant une variation dE_p *négative*. Il s'ensuit que, selon la relation 2.4.3.f, la *variation* $d\Phi_e$ du flux *embrassé* sera *positive* (I étant toujours pris positif). On est donc fondé à dire que, sous l'effet des forces d'interaction magnétique, le circuit modifiera spontanément son attitude dans l'espace de manière à être traversé par le maximum (positif) possible de flux. On dit d'un tel circuit qu'il obéit à la *règle du flux maximum*.

2.4.4. Action mécanique d'un champ magnétique sur un circuit

Tout déplacement *infinitésimal* d'un objet *non ponctuel* peut toujours être considéré comme la combinaison d'une translation pure infinitésimale, et d'une rotation pure infinitésimale autour d'un axe (Δ) qui passe par le centre d'inertie G de l'objet. Dans le cas général, les forces qui provoquent un tel déplacement présentent, à la fois, une résultante \vec{f} appliquée en G , et un moment de force résultant $\vec{\Gamma}$ par rapport à G , qui est aligné sur (Δ) (si $\vec{\Gamma}$ était nul, le déplacement se réduirait à une translation pure, et si \vec{f} était nulle, il se réduirait à une rotation pure). Supposons ainsi que, sous l'effet de forces appliquées, un objet subisse la *translation pure* infinitésimale $\overrightarrow{MM'}$ et la *rotation pure* infinitésimale $d\alpha$ (autour d'un axe (Δ) passant par son centre d'inertie G). Alors, si $d\alpha$ est comptée positive lorsqu'elle entraîne un tire-bouchon à progresser dans le sens de $\vec{\Gamma}$, le travail infinitésimal total de ces forces est la somme :

$$\delta W = \vec{f} \cdot \overrightarrow{MM'} + \|\vec{\Gamma}\| d\alpha .$$

Prenons maintenant pour objet, un circuit *plan* (C) parcouru par un courant d'intensité I *constante*, qui est muni d'un vecteur unitaire normal \vec{N} pointant dans le sens de progression d'un tire-bouchon qui tournerait avec le courant. Nous nous proposons de relier au flux Φ_e *embrassé* par (C) , la force magnétique \vec{f} et le moment de force magnétique $\vec{\Gamma}$ qu'il subit lorsqu'il est plongé dans un champ magnétique \vec{B} *constant* et (a priori) *non uniforme*.

- Cas d'une translation pure

Selon le théorème de Maxwell de la variation du flux *embrassé*, le travail de la force magnétique \vec{f} appliquée au centre d'inertie G du circuit (C) qui subit, ainsi, la *translation pure* infinitésimale et infiniment lente $\overrightarrow{MM'}$, est (voir figure 2.4.4.a) :

$$\vec{f} \cdot \overrightarrow{MM'} = I d\Phi_e .$$

Dans les coordonnées cartésiennes, cette relation se réécrit :

$$(f_x \vec{i} + f_y \vec{j} + f_z \vec{k}) (dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}) = I \left(\frac{\partial \Phi_e}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi_e}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi_e}{\partial z} dz \right),$$

soit,

$$f_x dx + f_y dy + f_z dz = I \left(\frac{\partial \Phi_e}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi_e}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi_e}{\partial z} dz \right).$$

D'où il vient, par identification, les trois égalités :

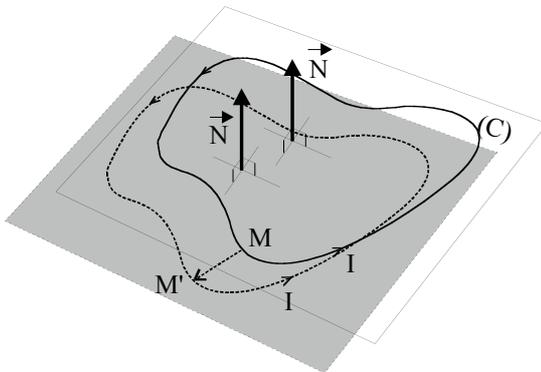
$$f_x = I \frac{\partial \Phi_e}{\partial x}, f_y = I \frac{\partial \Phi_e}{\partial y}, f_z = I \frac{\partial \Phi_e}{\partial z},$$

qui autorisent à poser :

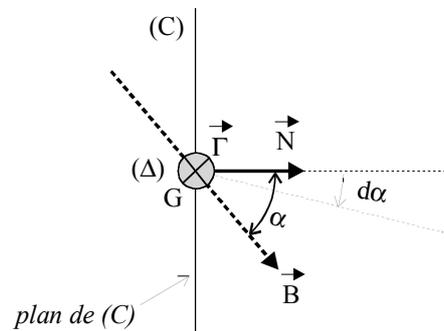
$$\vec{f} = I \overrightarrow{\text{grad}} \Phi_e$$

2.4.4.a

les termes $[\partial \Phi_e / \partial x] dx$, $[\partial \Phi_e / \partial y] dy$ et $[\partial \Phi_e / \partial z] dz$ représentant les *variations* du flux embrassé par la spire lorsqu'elle effectue les *translations* respectives $dx \vec{i}$, $dy \vec{j}$ et $dz \vec{k}$.



2.4.4.a



2.4.4.b

- Cas d'une rotation pure

D'après la loi de Lenz, un moment de forces magnétiques $\vec{\Gamma}$ qui s'exerce sur le circuit (C), tend à le faire pivoter de manière à accroître le flux de \vec{B} qu'il embrasse, c'est-à-dire à rendre \vec{B} et \vec{N} colinéaires et de même sens. L'axe (Δ) autour duquel s'effectue la rotation porte, bien évidemment, $\vec{\Gamma}$ et passe, comme l'on sait, par le centre d'inertie G du circuit (voir la

figure 2.4.4.b). Alors, si α est l'angle non orienté entre \vec{B} et \vec{N} , et $d\alpha$ sa variation (infinitésimale et infiniment lente) sous l'effet de $\vec{\Gamma}$, le théorème de Maxwell de la variation du flux *embrassé* permet d'écrire le travail de ce moment de forces comme :

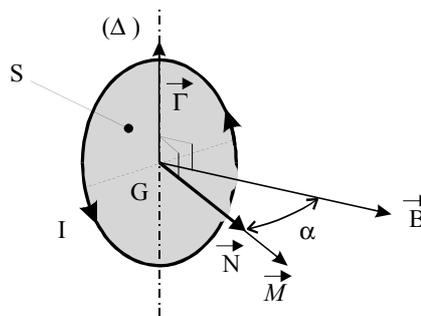
$$\|\vec{\Gamma}\|(-d\alpha) = I d\Phi_e,$$

le signe *moins* venant de ce que l'on a $d\Phi_e > 0$ lorsque $d\alpha < 0$. Il s'ensuit que :

$$\boxed{\|\vec{\Gamma}\| = -I \frac{d\Phi_e}{d\alpha}} \quad 2.4.4.b$$

2.4.5. Action sur un dipôle magnétique

Supposons que le circuit précédent soit un dipôle magnétique (voir § 2.3.4.). Ce dipôle est équivalent à une spire conductrice circulaire de centre G et de surface S , parcourue par un courant I constant, et de moment magnétique $\vec{M} = S I \vec{N}$ (\vec{N} étant le vecteur unitaire normal à la spire, orienté selon la règle du tire-bouchon vis-à-vis du courant). Bien que le champ \vec{B} ne soit pas a priori uniforme, il peut être considéré comme identique en tout point de S qui, par définition du dipôle, est *petite*. Le flux embrassé par S peut donc s'écrire $\Phi_e = \vec{B} \cdot \vec{N} S$.



2.4.5.

- Cas d'une translation pure

D'après la relation 2.4.4.a, la force magnétique \vec{f} appliquée au centre d'inertie G du dipôle, est :

$$\vec{f} = I \overrightarrow{\text{grad}} \Phi_e = \overrightarrow{\text{grad}} (I \Phi_e) = \overrightarrow{\text{grad}} (I \vec{B} \cdot \vec{N} S) = \overrightarrow{\text{grad}} (\vec{B} \cdot \vec{M})$$

- Cas d'une rotation pure

D'après la relation 2.4.4.b, lorsqu'un dipôle soumis au moment de forces magnétiques $\vec{\Gamma}$, voit l'angle non orienté α entre son vecteur \vec{N} et le champ \vec{B} subir la variation infinitésimale et infiniment lente $d\alpha$, on a :

$$I d\Phi_e = -d\alpha \|\vec{\Gamma}\| .$$

Or, l'intensité I étant supposée rester constante dans un dipôle, on peut encore écrire :

$$I d\Phi_e = d(I \Phi_e) = d(I \vec{B} \cdot \vec{N} S) = d(I S \|\vec{B}\| \cos \alpha) = I S \|\vec{B}\| d(\cos \alpha) = -I S \|\vec{B}\| \sin \alpha d\alpha .$$

En identifiant, alors, les deux relations ci-dessus, on obtient :

$$\|\vec{\Gamma}\| = I S \|\vec{B}\| \sin \alpha = I S \|\vec{N}\| \|\vec{B}\| \sin \alpha = \|\vec{M}\| \|\vec{B}\| \sin \alpha ,$$

et comme $\vec{\Gamma}$ a pour effet d'aligner \vec{M} sur \vec{B} , il est justifié d'écrire :

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$$

Travail Personnel

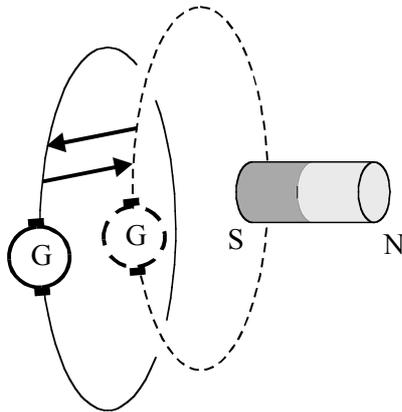
1. Mémoriser l'énoncé et les relations qui sont encadrés.
2. A partir de la figure 2.4.3.a, montrer qu'en inversant le sens du courant seul, puis le sens du déplacement seul, puis les deux, on a toujours $\Phi_C = \Phi_f - \Phi_i$.

2.5. Induction magnétique

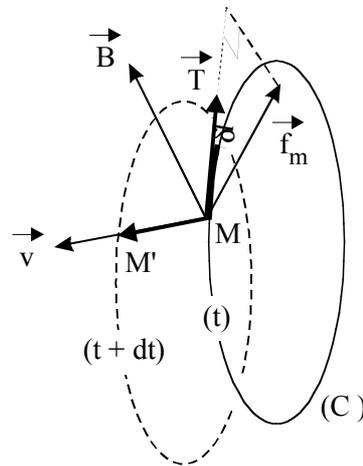
Jusqu'ici, nous ne nous sommes intéressés qu'aux champs magnétiques *établis* ou *constants*, c'est-à-dire produits par des aimants *fixes* ou des circuits *fixes* parcourus par des courants *permanents*. Nous allons étudier, maintenant, les phénomènes qui apparaissent lorsque le flux du champ magnétique qui traverse un circuit, *varie dans le temps*. Historiquement, cette étude a pour origine les efforts (infructueux !) de Faraday pour produire un courant électrique *permanent* à partir d'un flux du champ magnétique *constant*, exactement à l'inverse de ce qu'on observait couramment, à savoir l'apparition d'un flux du champ magnétique constant au voisinage d'un conducteur parcouru par un courant permanent.

2.5.1. Circuit en mouvement dans un champ magnétique constant (uniforme ou non)

Imaginons un circuit (purement résistif) fermé sur un galvanomètre susceptible de déceler l'apparition d'un courant, et approchons-le d'un aimant fixe (figure 2.5.1.) : tant que dure le déplacement, le galvanomètre dévie. Si on immobilise le circuit, le galvanomètre revient au zéro. Ramenons maintenant le circuit à sa position de départ : pendant tout le mouvement, il y a encore déviation du galvanomètre, mais en sens inverse de la précédente. Dès le retour du circuit à l'immobilité, le galvanomètre revient au zéro.



2.5.1.



2.5.2.

Le *mouvement* du circuit dans le champ magnétique créé par l'aimant, *induit* donc un courant dans le circuit, comme s'il y apparaissait, *le temps du déplacement*, un générateur en série dont la polarité s'inverse lorsque le sens du déplacement s'inverse. On dit que le circuit est le siège d'un phénomène d'*induction électromagnétique*.

2.5.2. Loi de Faraday

On peut interpréter ces phénomènes par la manifestation de la *force magnétique* qui, au cours du *déplacement* du circuit, met en mouvement les *charges mobiles* que contient ce dernier. Soit, en effet, un circuit conducteur (C) plongé dans un champ magnétique \vec{B} constant (figure 2.5.2.). Orientons (C) *arbitrairement* en y définissant en chaque point un vecteur unitaire \vec{T} tangent, de même sens que l'orientation choisie. Alors, si (C) effectue la translation $\overrightarrow{MM'}$ pendant le laps de temps infinitésimal dt , les charges mobiles q contenues dans un élément de *longueur* δl du circuit prennent la vitesse $\vec{v} = \overrightarrow{MM'} / dt$ dans le champ \vec{B} et subissent, de ce fait, la force magnétique $\vec{f}_m = q (\vec{v} \wedge \vec{B})$. Mais, comme ces charges ne peuvent sortir du circuit, leur mouvement à l'intérieur de celui-ci est régi par la *coordonnée* de \vec{f}_m selon \vec{T} , soit par :

$$\vec{f}_m \cdot \vec{T} = q (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{T} = q \left(\frac{\overrightarrow{MM'}}{dt} \wedge \vec{B} \right) \cdot \vec{T}$$

Tout se passe donc, en définitive, comme si les charges mobiles étaient soumises à un *champ électromoteur* $\vec{E}_m = E_m \vec{T}$ (avec $E_m > 0$ ou < 0), l'élément δl se muant en un générateur de *fem* infinitésimale de . La *fem* d'un générateur, définie comme la circulation interne de son champ électromoteur depuis le pôle de plus bas potentiel jusqu'à celui de potentiel le plus élevé, était une grandeur nécessairement > 0 . Il est commode d'écrire, ici, de comme la circulation élémentaire $de = \vec{E}_m \cdot \delta l \vec{T} = E_m \delta l$, et de la transformer ainsi en une *grandeur algébrique*, qui est positive lorsque le sens arbitraire choisi pour \vec{T} est le même que celui de \vec{E}_m , et négative dans le cas contraire (δl étant positive par nature). Le champ \vec{E}_m peut être obtenu en posant qu'il y a identité des coordonnées de forces $q E_m$ et $\vec{f}_m \cdot \vec{T}$; d'où il vient :

$$E_m = \left(\frac{\overrightarrow{MM'}}{dt} \wedge \vec{B} \right) \cdot \vec{T}$$

soit, en multipliant les deux membres par δl et en posant $\delta l \vec{T} = \delta \vec{l}$:

$$E_m \delta l = \left(\frac{\overrightarrow{MM'}}{dt} \wedge \vec{B} \right) \cdot \delta \vec{l} = \left(\delta \vec{l} \wedge \frac{\overrightarrow{MM'}}{dt} \right) \cdot \vec{B} = \frac{1}{dt} \left(\delta \vec{l} \wedge \overrightarrow{MM'} \right) \cdot \vec{B} = -\frac{1}{dt} \left(\overrightarrow{MM'} \wedge \delta \vec{l} \right) \cdot \vec{B}$$

On a, par conséquent, $de = E_m \delta l = -\frac{1}{dt} \left(\overrightarrow{MM'} \wedge \delta \vec{l} \right) \cdot \vec{B}$. Ainsi, la *fem* « induite » dans le circuit tout entier, par le déplacement, est :

$$e = \oint_{(C)} de = -\frac{1}{dt} \oint_{(C)} \left(\overrightarrow{MM'} \wedge \delta \vec{l} \right) \cdot \vec{B} = -\frac{d\Phi_c}{dt}$$

puisque, selon le § 2.4.3., l'intégrale représente le *flux coupé* par le déplacement infinitésimal de (C). Comme, selon ce même paragraphe, elle représente également la *variation* $d\Phi_e$ du *flux embrassé* par (C), on peut écrire :

$$e = -\frac{d\Phi_c}{dt} = -\frac{d\Phi_e}{dt}$$

2.5.2.a

égalités qui constituent la *Loi de Faraday*.

Remarques :

1. La grandeur e telle que définie par 2.5.2.a, s'appelle *force électromotrice d'induction*.
2. La Loi de Faraday est encore *vérifiée* si, le circuit restant fixe, c'est l'aimant qui se déplace (bien qu'alors on ne puisse plus définir, à proprement parler, de vitesse de déplacement des charges dans le circuit, sinon par rapport au champ magnétique). Elle l'est toujours, si tout reste immobile, \vec{B} seul variant (comme dans le cas où ce champ est produit par une spire fixe parcourue par un courant d'intensité *variable*).

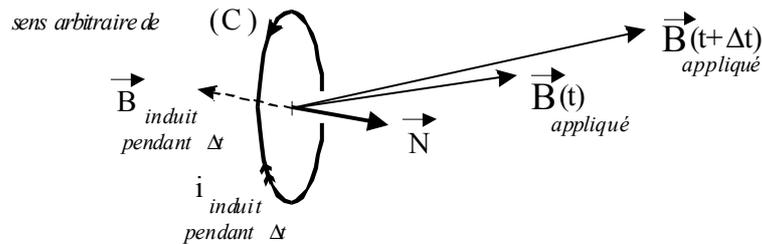
2.5.3. Loi de Lenz

D'après les conventions de signe adoptées, le *sens arbitraire choisi sur* (C) définit :

- (par la règle du tire-bouchon) le sens des vecteurs unitaire normaux \vec{N} à toute surface s'appuyant sur ce circuit et, en conséquence, le *signe du flux embrassé* par ce circuit ;

- et le signe de e , qui est positif si le sens du courant produit est celui choisi pour (C) .

On voit ainsi qu'à une variation *positive* du flux embrassé, correspond selon 2.5.2.a une *fem négative*, donc un courant dans (C) qui produit un champ dont le flux *s'oppose*, en définitive, à cette augmentation du flux embrassé (figure 2.5.3.).



2.5.3.

La *Loi de Lenz* rend compte de ce phénomène (déjà contenu dans la Loi de Faraday) en énonçant :

l'induction électromagnétique agit toujours en sens tel qu'elle s'oppose aux causes qui lui ont donné naissance.

2.5.4. Auto-induction

Nous venons de voir qu'un circuit embrassant un flux *variable* produit par un autre circuit ou par un aimant, était le siège d'une *fem* d'induction. Ce phénomène s'observe encore si le flux variable est dû *au circuit lui-même* ! On dit alors qu'il se produit une *auto-induction*.

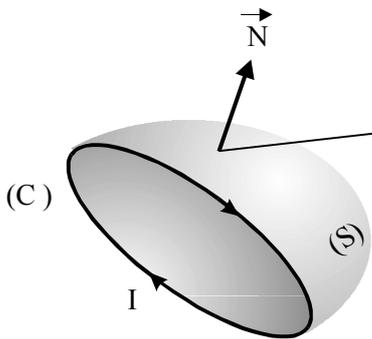
- Coefficient d'auto-induction

Considérons ainsi un circuit (C) orienté de manière arbitraire, l'intensité I du courant qui le parcourt étant comptée, algébriquement, positive ou négative suivant que son sens coïncide ou non avec celui choisi pour cette orientation. Soit (S) une surface s'appuyant sur (C) , et \vec{N} l'unitaire normal à (S) dont le sens est celui de progression d'un tire-bouchon tournant selon l'orientation arbitraire de (C) .

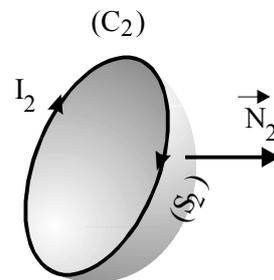
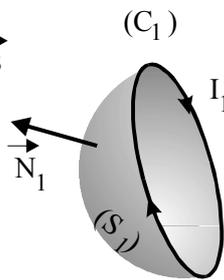
Un courant d'intensité I dans (C) crée un champ magnétique \vec{B} qui produit, inévitablement, un flux à travers (S) elle-même (figure 2.5.4.) ; ce flux est appelé *auto-flux* et noté, pour cela, Φ_a . En un point quelconque de (S) , le champ \vec{B} est la résultante des champs élémentaires $d\vec{B}$ que produit chaque élément $d\vec{l}$ de (C) . Or, selon Biot et Savart, chaque vecteur $d\vec{B}$ est proportionnel à l'intensité I du courant dans (C) ; il en va donc de même pour \vec{B} et, par conséquent, pour Φ_a . On est, ainsi, fondé à poser que Φ_a est proportionnel à I , soit que :

$$\boxed{\Phi_a = L I} \quad 2.5.4.a$$

Appelé coefficient d'*auto-induction* (ou *auto-inductance* ou coefficient de *self*, ou, encore, *self* tout court), le coefficient de proportionnalité L ne dépend que des caractéristiques géométriques de (C) ; de plus, en raison des conventions de signe adoptées, il est toujours *positif*. Enfin, il s'exprime en *Henry* (symbole H).



2.5.4.



2.5.5.

- Force électromotrice d'auto-induction

Si l'intensité du courant dans le circuit (C) varie de dI pendant dt , la variation $d\Phi_a$ de l'auto-flux que ce courant crée à travers (C) lui-même, est, selon la relation 2.5.4.a, telle que :

$$\frac{d\Phi_a}{dt} = L \frac{dI}{dt}$$

Par conséquent, d'après 2.5.2.a, (C) est le siège d'une fem $e = -d\Phi_a / dt$ dite d'*auto-induction*, que la relation précédente permet de réécrire :

$$e = -L \frac{dI}{dt} \quad 2.5.4.b$$

Là encore, on voit que si dI est positif, la fem d'auto-induction est négative et crée, par conséquent, un courant de sens opposé à l'orientation de (C) choisie. L'accroissement de flux dû à dI donne ainsi naissance à un flux *négatif* qui contrecarre cette augmentation. La Loi de Lenz est donc aussi vérifiée pour l'auto-induction.

Remarques :

1. Si la résistance électrique de (C) est R , et si I (variable) est produit par un générateur de fem E (variable) en série dans (C) , la loi d'Ohm permet d'écrire que $E + e = RI$ soit, d'après 2.4.5.b, que :

$$E = RI + L \frac{dI}{dt} \quad 2.5.4.c$$

2. La relation 2.4.5.c est générale : elle est valable si I (variable) est produit par un générateur de fem (variable) mis en série dans (C) ; elle l'est encore si I est créé par induction sous l'effet de la variation de flux (à travers (C)) d'un champ magnétique d'origine *extérieure*.

2.5.5. Induction mutuelle entre deux circuits fermés

- Coefficient d'induction mutuelle ou inductance mutuelle

Considérons, cette fois, *deux* circuits (C_1) et (C_2) orientés arbitrairement, les intensités I_1 et I_2 des courants qui les parcourent étant comptées positives ou négatives selon que leur sens coïncide ou non avec l'orientation choisie correspondante (figure 2.5.5.). I_1 crée en tout point d'une surface (S_2) s'appuyant sur (C_2) et munie de vecteurs unitaires normaux \vec{N}_2 (orientés en référence au sens choisi pour ce circuit, selon la règle du tire-bouchon), un champ \vec{B}_1 qui, d'après la relation de Biot et Savart, est proportionnel à I_1 . Par conséquent, le flux

(embrassé) Φ_{12} que produit \vec{B}_1 à travers (C_2) est aussi proportionnel à I_1 et l'on peut écrire :

$$\Phi_{12} = M_{12} I_1$$

On montre, de la même manière, que le flux à travers (C_1) du champ créé par I_2 , est tel que :

$$\Phi_{21} = M_{21} I_2$$

Les coefficients de proportionnalité M_{12} et M_{21} sont appelés *coefficients d'induction mutuelle* des deux circuits. Comme L ils s'expriment en *Henrys*, mais peuvent être positifs ou négatifs selon les orientations choisies pour les circuits.

Les circuits (C_1) et (C_2) exercent nécessairement entre eux des forces d'interaction magnétique et, de ce fait, possèdent ensemble une *énergie potentielle d'interaction magnétique*. D'après le théorème de Maxwell (de la variation du flux *embrassé*), le travail dépensé par ces forces au cours d'un déplacement infinitésimal que subirait (C_2) par rapport à (C_1) , est :

$$\delta W = I_2 d\Phi_{12} = I_1 I_2 dM_{12}$$

Il revient évidemment au même de considérer que, dans cette opération, c'est (C_1) qui a subi un déplacement infinitésimal par rapport à (C_2) ; on peut donc tout aussi bien écrire :

$$\delta W = I_1 d\Phi_{21} = I_1 I_2 dM_{21}$$

Il s'ensuit que $dM_{12} = dM_{21} \Rightarrow M_{12} = M_{21} + C$. Comme M_{12} et M_{21} doivent tendre tous deux vers zéro lorsque les deux circuits s'éloignent indéfiniment l'un de l'autre, la constante C est nulle et l'on a finalement $M_{12} = M_{21} = M$, le coefficient M étant appelé *inductance mutuelle* des deux circuits.

Par conséquent, l'*énergie potentielle d'interaction* de (C_1) avec (C_2) , définie comme à l'accoutumée par $dE_p = -\delta W$, est telle que :

$$E_p = -I_1 I_2 M + C^{te}$$

et l'on a, aussi :

$$\Phi_{12} = M I_1 \quad \text{et} \quad \Phi_{21} = M I_2 \quad 2.5.5.a$$

- Force électromotrice d'induction mutuelle

Au bilan, le flux Φ_1 traversant (C_1) est la somme du flux Φ_{11} qu'il produit sur lui-même et de celui, Φ_{21} , que crée (C_2) ; soit $\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{21} = L_1 I_1 + M I_2$. On a de la même manière $\Phi_2 = \Phi_{22} + \Phi_{12} = L_2 I_2 + M I_1$.

En régime variable, les *fém* induites dans chaque circuit sont donc :

$$e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} \quad \text{et} \quad e_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt} \quad 2.5.5.b$$

Remarques :

1. Si (C_1) et (C_2) présentent les résistances électriques respectives R_1 et R_2 , et si I_1 et I_2 (variables) sont produits par des générateurs de *fém* E_1 et E_2 (variables), mis en série dans ces deux circuits respectivement, la loi d'Ohm permet d'écrire :

$$E_1 + e_1 = R_1 I_1 \quad \text{et} \quad E_2 + e_2 = R_2 I_2$$

Soit, d'après 2.5.5.b :

$$E_1 = R_1 I_1 + L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} \quad \text{et} \quad E_2 = R_2 I_2 + L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt}$$

2. Ces interactions entre circuits sont utilisées dans de nombreuses applications, en particulier dans les *transformateurs* où *primaire* et *secondaire* sont couplés par induction mutuelle.

2.6. Les relations de Maxwell

On doit au physicien Anglais James Clerk Maxwell (1831-1879) un ensemble cohérent de quatre équations appelées « relations de Maxwell », visant à expliquer tous les phénomènes électrostatiques et électrodynamiques connus à son époque. Ces relations se basent, en fait, sur des théorèmes ou des lois déjà établis, mais élargissent leur domaine de validité (par exemple, en les rendant applicables en « régime variable » quand ils ne l'étaient, a priori, qu'en « régime permanent »). Il s'agit : du théorème de Gauss, de la loi de conservation du flux magnétique, de la loi de Faraday et du théorème d'Ampère.

Formulées au moyen d'intégrales d'espace qui, par nature, s'appliquent à des étendues *finies*, les relations de Maxwell sont encore utilisables « localement », c'est-à-dire sous forme différentielle (et donc pour des étendues *infinitésimales*). Afin d'en simplifier l'expression, nous n'envisageons, ici, que le cas où l'espace ne contient ni milieux diélectriques ni matériaux magnétiques, charges et courants se répartissant ou se propageant sans support physique.

2.6.1. Théorème de Gauss pour le champ électrique

- Forme intégrale :

La forme intégrale du théorème de Gauss :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{N} d^2S = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad 2.6.1.a$$

a été établie pour un champ *électrostatique* c'est-à-dire un champ électrique indépendant du temps (régime permanent). Selon Maxwell, cette égalité est encore applicable lorsque les grandeurs concernées dépendent du temps (régime variable).

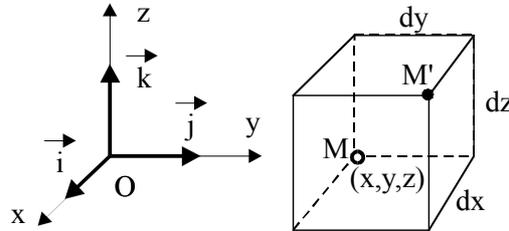
- Forme différentielle ou locale :

Le champ électrique \vec{E} en un point donné résulte de la distribution dans tout l'espace des charges qui le créent. Par ailleurs, la forme de cette distribution étant elle-même le résultat des

multiples interactions Coulombiennes qui s'y produisent, la densité volumique de charge ρ en un point donné ne saurait être indépendante de la répartition spatiale des autres charges. Les grandeurs \vec{E} et ρ en un même point, dépendant ainsi, toutes deux, de la distribution des charges dans le reste de l'espace, il apparaît concevable qu'elles soient reliées entre elles.

Pour déterminer cette relation, isolons par la pensée au sein d'une répartition volumique de charges de densité ρ , un parallélépipède élémentaire d'arêtes dx , dy , dz , c'est-à-dire de volume $d^3\tau = dx dy dz$ et de charge $\rho d^3\tau$ (voir figure 2.6.1.). Soit M le sommet de $d^3\tau$ de coordonnées (x, y, z) , et M' le sommet opposé de coordonnées $(x + dx, y + dy, z + dz)$. Alors, en admettant que le champ électrique soit égal à \vec{E} sur les surfaces des trois facettes de $d^3\tau$ qui ont M pour sommet commun, et qu'il soit égal à $\vec{E} + d\vec{E}$ sur les surfaces des trois autres facettes qui ont M' pour sommet commun, le flux du champ électrique *sortant* de la surface de $d^3\tau$ assimilée à une surface de gauss infinitésimale, est :

$$\begin{aligned}
 & \vec{E} \cdot (-\vec{i}) dy dz + \vec{E} \cdot (-\vec{j}) dz dx + \vec{E} \cdot (-\vec{k}) dx dy + \dots \\
 & \dots (\vec{E} + d\vec{E}) \cdot \vec{i} dy dz + (\vec{E} + d\vec{E}) \cdot \vec{j} dz dx + (\vec{E} + d\vec{E}) \cdot \vec{k} dx dy, \text{ soit :} \\
 & d\vec{E} \cdot \vec{i} dy dz + d\vec{E} \cdot \vec{j} dz dx + d\vec{E} \cdot \vec{k} dx dy \qquad \qquad \qquad 2.6.1.b
 \end{aligned}$$



2.6.1.

Cette expression pouvant être égalée à $\rho d^3\tau / \epsilon_0$ d'après la relation 2.6.1.a, et $d\vec{E}$ se

développant en $\frac{\partial E_x}{\partial x} dx \vec{i} + \frac{\partial E_y}{\partial y} dy \vec{j} + \frac{\partial E_z}{\partial z} dz \vec{k}$, on obtient aisément :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial E_x}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial E_y}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial E_z}{\partial z} dx dy dz = \frac{\rho d^3\tau}{\epsilon_0}, \text{ soit :} \\
 & \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \qquad \qquad \qquad 2.6.1.c
 \end{aligned}$$

égalité qui se condense, conventionnellement, sous la forme :

$$\boxed{\boxed{\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}} \quad 2.6.1.d$$

Remarques :

1. L'expression $\operatorname{div} \vec{E}$ s'énonce « divergence de \vec{E} ». On voit que la « divergence » d'un champ de vecteurs en un point, n'est autre que le *flux de ce champ par unité de volume*, qui s'écoule de ce point (appelé pour cela « point source ») vers l'espace, ou bien qui converge depuis l'espace vers ce point (dénommé, alors, « puit »).
2. Soit Σ la surface fermée finie d'un volume τ qui contient des charges en densité volumique ρ . Selon le théorème de Gauss, on a :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{N} d^2\Sigma = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\tau} \rho d^3\tau = \iiint_{\tau} \frac{\rho}{\epsilon_0} d^3\tau$$

égalité que la relation 2.6.1.c permet de transformer en l'expression suivante appelée *théorème de Green* (théorème également applicable à tout champ de vecteurs continus et dérivables en tout point) :

$$\boxed{\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{N} d^2\Sigma = \iiint_{\tau} \operatorname{div} \vec{E} d^3\tau} \quad 2.6.1.e$$

2.6.2. Conservation du flux du champ magnétique

- Forme intégrale :

Nous avons vu au paragraphe 2.1.5. que, dans une zone où existe un champ magnétique \vec{B} indépendant du temps (régime permanent), le flux de \vec{B} sortant d'une surface *fermée* Σ est nul *par propriété* ; ce qui s'écrit selon la relation 2.1.5.a :

$$\boxed{\boxed{\oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{N} d^2\Sigma = 0}} \quad 2.6.2.a$$

Selon Maxwell, cette loi reste parfaitement applicable si \vec{B} devient dépendant du temps (régime variable).

- Forme différentielle ou locale :

En adoptant pour le champ magnétique \vec{B} une démarche identique à celle suivie au § 2.6.1. pour le champ électrique \vec{E} , il est facile de montrer que, « localement » (c'est-à-dire, en considérant la surface fermée d'un volume infinitésimal entourant un point de l'espace), la loi de conservation du flux de \vec{B} s'exprime comme :

$$\boxed{\text{div } \vec{B} = 0}$$

2.6.2.b

2.6.3. Loi de Faraday

- Forme intégrale :

Selon la loi de Faraday (relation 2.5.2.a), un circuit conducteur filiforme fermé (C) qui embrasse un flux *variable* de champ magnétique, Φ_e , est le siège d'une force électromotrice d'induction e telle que :

$$e = - \frac{d\Phi_e}{dt}, \quad 2.6.3.a$$

Cette égalité est vérifiée quelle que soit la cause de la variation du flux embrassé (circuit mobile dans un champ permanent ou circuit fixe dans un champ variable). Pour expliquer ce phénomène, nous avons admis l'apparition, dans le conducteur, d'un champ dit électromoteur \vec{E}_m , dont la circulation le long de (C) était égale à la force électromotrice e . Ainsi pouvons-nous reformuler la relation 2.6.3.a comme :

$$e = \oint_{(C)} \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi_e}{dt} = - \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{N} d^2\Sigma$$

$d\vec{l}$ étant un vecteur trajet infinitésimal le long de (C) , et \vec{N} le vecteur unitaire normal à une

surface Σ ouverte limitée par ce circuit. L'expérience confirme que cette relation reste valable lorsqu'un champ *électrique* variable \vec{E} remplace le champ *électromoteur* \vec{E}_m , et que (C) devient un simple *contour fermé* dans l'espace, ne suivant pas obligatoirement un *conducteur* filiforme. La loi de Faraday ainsi généralisée s'écrit alors, sous forme intégrale :

$$\oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{N} d^2\Sigma \quad 2.6.3.b$$

et permet de dire que :

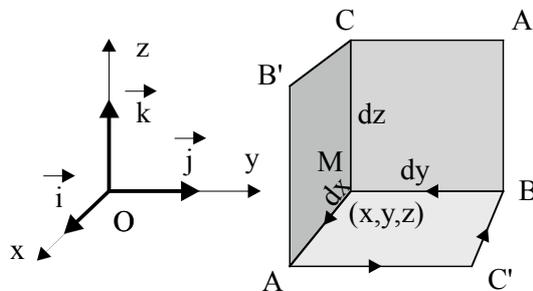
En tout point de l'espace où existe un champ magnétique variable, se manifeste un champ électrique variable dont la circulation sur un contour fermé est égale à l'opposé de la dérivée temporelle du flux du champ magnétique qu'embrasse ce contour.

Remarques :

3. Dans la relation 2.6.3.b, le sens de \vec{N} est celui de progression d'un tire-bouchon qui tournerait suivant le sens arbitrairement choisi sur (C) pour fixer le sens des $d\vec{l}$.
4. Le champ \vec{E} de la relation 2.6.3.b ne peut être un pur champ *électrostatique* puisque, par propriété du potentiel scalaire V , la circulation de \vec{E}_s est *nulle* sur un contour fermé.

- Forme différentielle ou locale :

Pour établir la forme différentielle de la loi de Faraday, considérons, dans l'espace, trois contours rectangulaires infinitésimaux, assemblés en un trièdre trirectangle de sommet $M(x, y, z)$ et d'arêtes dx , dy , dz (voir la figure 2.6.3.).



2.6.3.

Ces trois contours ayant $M(x, y, z)$ pour sommet commun on admet, comme au paragraphe 2.6.1., que le champ magnétique est identiquement égal à $\vec{B}(x, y, z)$ sur leur trois surfaces. Le champ électrique, quant à lui, est supposé égal à $\vec{E}(x, y, z)$ le long des trois arêtes MA, MB, MC et vaut, en conséquence, $\vec{E} + \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial x}\right)dx$ le long des côtés AC' et AB' à distance dx de M ; il vaut de même $\vec{E} + \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial y}\right)dy$ le long des côtés BA' et BC' à distance dy de M , et $\vec{E} + \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial z}\right)dz$ le long des côtés CA' et CB' à distance dz de M .

Ainsi, l'égalité 2.6.3.b appliquée au contour infinitésimal $MAC'BM$, orienté dans le sens direct par rapport au vecteur unitaire \vec{k} de l'axe \vec{Oz} , devient-elle :

$$\vec{E} \cdot (dx \vec{i}) + \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} dx\right) \cdot (dy \vec{j}) + \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} dy\right) \cdot (-dx \vec{i}) + \vec{E} \cdot (-dy \vec{j}) = -\frac{d}{dt} (\vec{B} \cdot \vec{k} dx dy)$$

soit :

$$E_x dx + E_y dy + \frac{\partial E_y}{\partial x} dx dy - E_x dx - \frac{\partial E_x}{\partial y} dy dx - E_y dy = -\frac{dB_z}{dt} dx dy$$

relation qui se réduit à :

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{dB_z}{dt}$$

Appliquée de la même façon aux contours $MBA'CM$ et $MCB'AM$ orientés dans le sens direct par rapport, respectivement, aux vecteurs unitaires \vec{i} et \vec{j} des axes \vec{Ox} et \vec{Oy} , l'égalité 2.6.3.b donne :

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{dB_x}{dt}$$

et

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{dB_y}{dt}$$

Ce jeu de trois égalités se condense, conventionnellement, en :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

2.6.3.c

Remarques :

1. La grandeur $\overrightarrow{rot\vec{E}}$, qui s'énonce « rotationnel de \vec{E} », est donc un vecteur dont les trois composantes cartésiennes sont $\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}$, $\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}$, $\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}$. Ce vecteur traduit le caractère *tourbillonnaire* du champ \vec{E} au voisinage du point considéré.
2. Si le contour (C) et la surface ouverte Σ qui s'appuie sur lui, restent fixes dans l'espace, la relation 2.6.3.b permet d'écrire :

$$\oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma} -\frac{d\vec{B}}{dt} \cdot \vec{N} d^2\Sigma$$

soit, d'après 2.6.3.c :

$$\boxed{\oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{rot\vec{E}} \cdot \vec{N} d^2\Sigma} \quad 2.6.3.d$$

expression qui constitue le *théorème de Stokes* (théorème également applicable à tout champ de vecteurs continus et dérivables en tout point).

2.6.4. Théorème d'Ampère**- Forme intégrale :**

Le théorème d'Ampère (voir le paragraphe 2.3.1.) énonce que *la circulation de \vec{B} le long d'un contour (C) orienté et fermé, est égale à μ_0 fois la somme algébrique des intensités des courants traversant toute surface délimitée par (C)* . Cette formulation permet donc d'écrire :

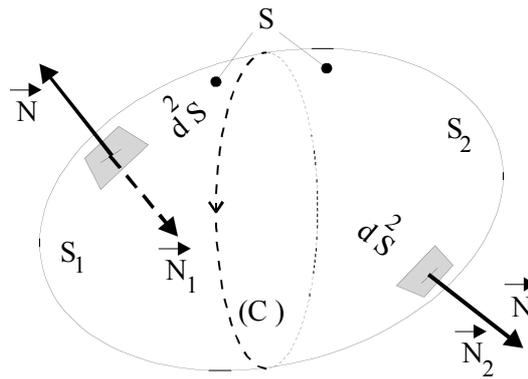
$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

si I représente la *somme algébrique* des intensités des courants qui traversent (C) (intensités comptées positives lorsque le sens des courants est celui de progression d'un tire-bouchon

tournant dans le sens de parcours choisi sur (C) , et négatives en cas contraire). Comme, dans ce théorème, rien n'impose la présence physique de *conducteurs* pour le transport des charges, tout flux de particules chargées qui traverserait (C) est à prendre en compte, quels que soient les moyens et la cause de ce mouvement. Il est alors commode de donner à l'égalité précédente une forme plus générale en remplaçant l'intensité I par son expression en fonction du vecteur densité de courant \vec{j} , c'est-à-dire en écrivant :

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{N} d^2\Sigma \quad 2.6.4.a$$

Dans cette expression Σ est une surface *ouverte* délimitée par (C) ; le sens de \vec{N} , son vecteur unitaire normal, est celui dans lequel progresse un tire-bouchon tournant dans le sens de parcours choisi pour (C) (\vec{N} indique donc le sens des courants d'intensité *positive*).



2.6.4.

Le second membre de la relation 2.6.4.a ne doit pas dépendre du choix de la surface Σ que délimite (C) ; ce qui se vérifie bien en régime *permanent* où les courants gardent une intensité constante. En effet, soit les deux surfaces *ouvertes* distinctes S_1 et S_2 délimitées par (C) , qui forment la surface *fermée* S (voir la figure 2.6.4.). Soit, également, \vec{N}_1 et \vec{N}_2 les vecteurs unitaires normaux respectifs de ces surfaces, orientés avec les mêmes conventions de sens qu'en 2.6.4.a. . Lorsque le régime est *permanent*, par définition aucune augmentation ni diminution locale de charge ne peut se produire, en particulier dans le volume de S . Ainsi la somme algébrique des intensités des courants entrant dans S par S_1 , doit-elle être égale à celle des courants qui en sortent par S_2 , et l'on a, *quel qu'ait été le choix* de S_1 et S_2 :

$$\iint_{S_1} \vec{j} \cdot \vec{N}_1 d^2S = \iint_{S_2} \vec{j} \cdot \vec{N}_2 d^2S \quad 2.6.4.b$$

Contrairement au régime permanent, le régime *variable* autorise, lui, des augmentations ou des diminutions locales de charge et, de ce fait, l'égalité 2.6.4.b n'est plus vérifiée. Soit, en effet :

$$\left[\iint_{S_1} \vec{j} \cdot \vec{N}_1 d^2S \right] dt \quad \text{et} \quad \left[\iint_{S_2} \vec{j} \cdot \vec{N}_2 d^2S \right] dt ,$$

les charges respectives pénétrant S à travers S_1 et sortant de S à travers S_2 , entre les instants t et $t + dt$. En raison de la loi de conservation de la charge, la charge Q_{int} que contient déjà S doit, entre ces deux mêmes instants, augmenter d'une quantité dQ_{int} telle que :

$$\left[\iint_{S_1} \vec{j} \cdot \vec{N}_1 d^2S \right] dt = \left[\iint_{S_2} \vec{j} \cdot \vec{N}_2 d^2S \right] dt + dQ_{\text{int}} ;$$

donc, telle que :

$$\iint_{S_1} \vec{j} \cdot \vec{N}_1 d^2S = \iint_{S_2} \vec{j} \cdot \vec{N}_2 d^2S + \frac{dQ_{\text{int}}}{dt} , \quad 2.6.4.c$$

relation qui « fait pendant », pour le régime variable, à l'égalité 2.6.4.b du régime permanent.

Soit, maintenant, \vec{E} le champ électrique en un point quelconque de la surface fermée S , et \vec{N} le vecteur unitaire normal *sortant* de S . Comme le sens positif choisi pour le parcours (C) représenté figure 2.6.4., implique que $\vec{N} = -\vec{N}_1$ sur S_1 et que $\vec{N} = \vec{N}_2$ sur S_2 , le théorème de Gauss rappelé au paragraphe 2.6.1.a peut se reformuler :

$$Q_{\text{int}} = \epsilon_0 \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{N} d^2S = -\epsilon_0 \iint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{N}_1 d^2S + \epsilon_0 \iint_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{N}_2 d^2S .$$

D'où, il vient :

$$\frac{dQ_{\text{int}}}{dt} = -\epsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{N}_1 d^2S + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{N}_2 d^2S$$

En introduisant, alors, ce développement dans la relation 2.6.4.c, on obtient aisément l'égalité :

$$\iint_{S_1} \vec{j} \cdot \vec{N}_1 d^2S + \epsilon_o \frac{d}{dt} \iint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{N}_1 d^2S = \iint_{S_2} \vec{j} \cdot \vec{N}_2 d^2S + \epsilon_o \frac{d}{dt} \iint_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{N}_2 d^2S \quad 2.6.4.d$$

prouvant, qu'en régime variable, ce n'est plus simplement $\iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{N} d^2\Sigma$ qui reste insensible au

choix de la surface Σ délimitée par (C) , mais toute l'expression :

$$\iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{N} d^2\Sigma + \epsilon_o \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{N} d^2\Sigma .$$

Sur la base de ce constat, Maxwell a postulé que la validité du théorème d'Ampère pouvait être étendue au régime variable, à la condition de compléter, comme ci-dessous, la relation 2.6.4.a :

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o \left[\iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{N} d^2\Sigma + \epsilon_o \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{N} d^2\Sigma \right] . \quad 2.6.4.e$$

On a donc :

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o I + \epsilon_o \mu_o \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{N} d^2\Sigma \quad 2.6.4.f$$

égalité traditionnellement appelée *relation d'Ampère-Maxwell*.

- Forme différentielle ou locale :

En appliquant à la forme intégrale 2.6.4.e de la relation d'Ampère-Maxwell, la méthode utilisée au paragraphe 2.6.3. pour établir l'expression différentielle de la loi de Faraday, il est aisé de voir que :

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o \left[\iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{N} d^2\Sigma + \epsilon_o \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{N} d^2\Sigma \right]$$

peut s'écrire localement :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \quad 2.6.4.g$$

Remarque :

Dans le vide en l'absence de charges ($\rho = 0$) et de courants ($\vec{j} = \vec{0}$), les quatre relations locales de Maxwell deviennent respectivement :

$$\text{div} \vec{E} = 0, \quad \text{div} \vec{B} = 0, \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}, \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \quad 2.6.4.h$$

Travail Personnel

1. Etablir, à titre d'exercice, les relations locales 2.6.2.b et 2.6.4.g.
2. Montrer que, dans les deux dimensions $[x, y]$ des coordonnées cartésiennes, $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}$ en un point M , traduit bien le caractère « tourbillonnaire » de \vec{E} autour de M . Que devient, en particulier, ce rotationnel si \vec{E} est orthoradial vis-à-vis de M ? S'il est purement radial ?

2.7. Les ondes électromagnétiques

Dans cette dernière partie, nous cherchons à montrer que la résolution des équations de Maxwell conduit à introduire la notion d'ondes électromagnétiques, dont on donnera les caractéristiques principales dans le cas des ondes planes.

2.7.1. Equations résolues en \vec{E} et \vec{B}

A partir des trois équations de Maxwell $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$, $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_o\vec{j} + \epsilon_o\mu_o\frac{d\vec{E}}{dt}$ et $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_o}$,

on utilise la relation sur les opérateurs vectoriels : $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E}$ pour en déduire la relation suivante :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\rho}{\epsilon_o}\right) - \Delta\vec{E} = -\frac{d}{dt}\left(\mu_o\vec{j} + \epsilon_o\mu_o\frac{d\vec{E}}{dt}\right)$$

qui conduit à la relation :

$$\Delta\vec{E} - \epsilon_o\mu_o\frac{d^2\vec{E}}{dt^2} = \frac{1}{\epsilon_o}\overrightarrow{\text{grad}}(\rho) + \mu_o\frac{d}{dt}(\vec{j}) \quad 2.7.1.a$$

D'une manière équivalente, on peut obtenir une expression équivalente pour le champ magnétique à partir des équations Maxwell $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$, $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_o\vec{j} + \epsilon_o\mu_o\frac{d\vec{E}}{dt}$ et $\text{div}\vec{B} = 0$, et de la relation sur les opérateurs vectoriels : $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{B}) - \Delta\vec{B}$, c'est-à-dire :

$$\Delta\vec{B} = \mu_o\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{j}) + \epsilon_o\mu_o\frac{d}{dt}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}))$$

ce qui conduit à la relation :

$$\Delta\vec{B} - \epsilon_o\mu_o\frac{d^2\vec{B}}{dt^2} = -\mu_o\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{j}) \quad 2.7.1.b$$

Contrairement aux équations de Maxwell, les relations 2.7.1.a et 2.7.1.b représentent des équations résolues en \vec{E} et \vec{B} (c'est-à-dire uniquement fonction de \vec{E} ou de \vec{B}) en fonction des distributions de charges et de courants.

2.7.2. Ondes électromagnétiques dans le vide

On s'intéresse aux propriétés du champ électromagnétique dans le vide indépendamment des charges, qui en sont à l'origine. On s'intéresse donc aux solutions des équations 2.7.1.a et 2.7.1.b en l'absence de charge et de densité de courants, c'est-à-dire :

$$\Delta \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} = 0 \quad \text{et} \quad \Delta \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{d^2 \vec{B}}{dt^2} = 0 \quad 2.7.2.a$$

Les équations 2.7.2.a constituent des *équations d'onde*, dont les solutions générales sont de la forme,

$$f(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct)$$

où c est la célérité de l'onde, F et G représentent respectivement une onde se propageant suivant l'axe des x positif et négatif.

On voit ainsi clairement apparaître que la notion de propagation d'ondes électromagnétiques découle directement de la résolution des équations de Maxwell.

La vitesse de propagation des ondes s'exprime directement en fonction de la permittivité du vide et de la perméabilité magnétique à l'aide de la relation :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$$

Propriétés des ondes planes :

On considère des ondes planes de forme sinusoidale, que l'on exprime sous la forme complexe :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad 2.7.2.b$$

où $\vec{k} = k \vec{u}$ est le vecteur d'onde, le vecteur \vec{u} indiquant la direction de propagation de l'onde.

On note ω la pulsation de l'onde, avec les relations usuelles exprimant la période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ et la

longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi}{k}$.

1/ Si on exprime $\text{div } \vec{E} = 0$ en coordonnées cartésiennes, on obtient :

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

En utilisant $\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$, on obtient $\frac{\partial E_x}{\partial x} = i k_x E_x$... ce qui conduit à la relation :

$$i(k_x E_x + k_y E_y + k_z E_z) = 0 \quad \text{ou encore} \quad \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \quad 2.7.2.c$$

On trouve ainsi que *le champ électrique est perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde.*

2/ Si on exprime maintenant $\text{rot } \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$ en coordonnées cartésiennes, on obtient :

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \quad \text{etc ...}$$

En dérivant les composantes du champ électrique et du champ magnétique, on obtient facilement la relation

$$i(k_y E_z - k_z E_y) = +i \omega B_x \quad \text{etc...}$$

c'est-à-dire
$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \quad 2.7.2.d$$

La relation 2.7.2.d montre ainsi que *le champ magnétique est perpendiculaire à la fois à la direction de propagation de l'onde mais également au champ électrique.*

Polarisation de l'onde plane :

Une onde plane électromagnétique peut être décrite par le vecteur d'onde \vec{k} , indiquant à la fois la direction de l'onde mais également sa longueur d'onde, et par le champ électrique \vec{E}_0 suivant la relation 2.7.2.a (pour $x=0$ et $t=0$). Le champ magnétique peut alors être déduit de la relation 2.7.2.d.

On appelle *la polarisation de l'onde plane*, le comportement du vecteur champ électrique au cours du temps.

A titre d'exemple, si on prend une onde se propageant suivant les $x > 0$, nous pouvons écrire le champ électrique sous une forme plus simple :

$$\vec{E} = E_y \vec{u}_y + E_z \vec{u}_z$$

avec
$$E_y = E_{0y} e^{i(kx - \omega t)} \quad \text{et} \quad E_z = E_{0z} e^{i(kx - \omega t)}$$

avec $E_{0z} = \alpha E_{0y} e^{i\varphi}$, où les paramètres α et φ décrivent les différences d'amplitude et différence de phase possible entre les deux composantes du champ électrique.

En notation réelle, le champ électrique peut alors s'écrire :

$$E_y = E_{0y} \cos(kx - \omega t) \quad \text{et} \quad E_z = \alpha E_{0z} \cos(kx - \omega t - \varphi)$$

Considérons quelques cas simples :

1/ Pour $\varphi = 0$, il n'existe aucun déphasage entre les composantes du champ électrique, dont la direction ne varie au cours du temps. On dit que l'onde possède une *polarisation rectiligne*.

2/ Lorsque $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ et $\alpha = 1$, l'extrémité du vecteur \vec{E} décrit un cercle à la vitesse angulaire ω . On dit que l'onde possède une *polarisation circulaire droite ou gauche* suivant le sens de rotation du champ.

3/ Lorsque $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ et $\alpha \neq 1$, l'extrémité du vecteur \vec{E} décrit une ellipse. On dit que l'onde possède une *polarisation elliptique droite ou gauche* suivant le sens de rotation du champ.

En pratique, les lampes traditionnelles, qui fournissent une lumière incohérente, ne permettent pas de fournir une lumière polarisée. Il est possible d'utiliser des dispositifs optiques, appelés polariseurs, qui permettent de sélectionner une composante de polarisation donnée. Par opposition, les lasers fournissent une lumière cohérente, qui peut avoir une polarisation bien définie.

Bibliographie

Claude FOIN : Electrostatique, Electrocinétique ; Cours (1 Tome)
Collection Grenoble Sciences/DSU 1995.

Lucien QUARANTA : Electrostatique, Magnétostatique
Armand Colin.

Michel HULIN, Jean Pierre MAURY : Les bases de l'électromagnétisme
Dunod 1991.

Hubert LUMBROSO : Problèmes résolus d'Electrostatique
Dunod Université.

A. BRELOT & al : Electricité et Magnétisme, Travaux Dirigés
Collection Hermann.

BERKELEY Vol. 2 : Electricité, Magnétisme
Armand Colin 1973.

M. ALONSO & E.J. FINN : Physique Générale, 2. Champs et ondes
Dunod 2001.

Michel HULIN, Nicole HULIN, Denise PERRIN : Equations de Maxwell – Ondes
électromagnétiques
Dunod 1992.