Série 1 : Bilan d'énergie de masse

1.1 Transformations nucléaires et bilan d'énergie de masse

Réaction (1.1)	Initial	Final	Conservation
A	18	18	oui
q	+9	+8+1	oui
Z	9	8	**non**
N	9	10	**non**
Réaction (1.2)			
A	212	212	oui
q	+84	+84	oui
Z	84	84	oui
N	128	128	oui
Réaction (1.3)			
A	31	31	oui
q	+15	+15	oui
Z	15	15	oui
N	16	16	oui

On en conclut que le nombre de nucléons (A) et la charge électrique (q) sont toujours conservés. Par contre, en ce qui concerne le nombre de protons (Z) et le nombre de neutrons (N), cela dépend de la réaction considérée.
En fait, la première réaction est une désintégration β^+, due à l'interaction faible, alors que les réactions (1.2) et (1.3) sont dues à l'interaction forte.
Dans la désintégration β^+, il y a dans l'état final un neutron de plus et un proton de moins. Il y a donc une transformation (sous l'effet de l'interaction faible) d'un proton en neutron.

$$\mathrm{p} \longrightarrow \mathrm{n} + \mathrm{e}^+ + \nu$$

2) Bilan d'énergie de masse
On part de la définition du **bilan d'énergie de masse** :

$$Q = \left[\sum_i \mathrm{m}_i - \sum_f \mathrm{m}_f\right] \times c^2$$

Pour la réaction (1.1) :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Q}_1 &= \big[\mathrm{m(F)} - \mathrm{m(O)} - \mathrm{m_e}\big]\mathrm{c}^2 \quad \text{car } \mathrm{m}(\nu) \simeq 0 \\
&= \big[\mathrm{M(F)} - 9\mathrm{m_e} - \mathrm{M(O)} + 8\mathrm{m_e} - \mathrm{m_e}\big]\mathrm{c}^2 \\
&= \big[\mathrm{M(F)} - \mathrm{M(O)} - 2\mathrm{m_e}\big]\mathrm{c}^2
\end{aligned}$$

Pour la réaction (1.2) :

$$\begin{aligned} Q_2 &= \big[M(Po) - 84m_e - M(Pb) + 82m_e - M(He) + 2m_e\big]c^2 \\ &= \big[M(Po) - M(Pb) - M(He)\big]c^2 \end{aligned}$$

Pour la réaction (1.3) :

$$Q_3 = \big[M(Al) + M(He) - M(P) - m(n)\big]c^2$$

Application numérique : $Q_2 = 0,0096127 \text{ uma} \times c^2$
Or, on sait que : $1\text{uma} \times c^2 = 931,5\text{MeV}$
D'où :

$$Q_2 = 8,95 \text{ MeV}$$

Q_2 est positif, la désintégration est donc possible (elle est exoénergétique).

3) Energie de liaison

L'énergie de liaison W d'un noyau ${}^A_Z X$ est définie par :

$$W = Zm_pc^2 + Nm_nc^2 - m({}^A_Z X)c^2$$

Pour la réaction (1.1) :

$$\begin{aligned} Q_1 &= \big[m(F) - m(O) - m_e\big]c^2 \\ &= 9m_pc^2 + 9m_nc^2 - W(F) - 8m_pc^2 - 10m_nc^2 + W(0) - m_ec^2 \\ &= W(O) - W(F) + m_pc^2 - m_nc^2 - m_ec^2 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Pour la réaction (1.2) :

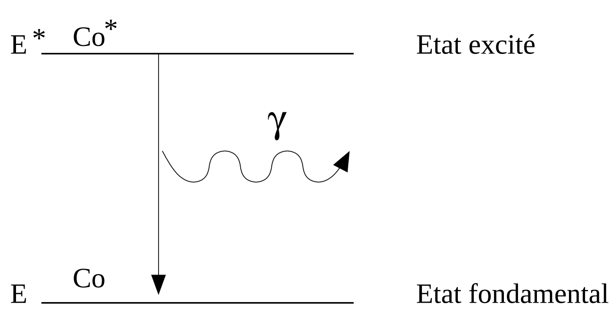
$$Q_2 = W(Pb) + W(He) - W(Po)$$

Pour la réaction (1.3) :

$$Q_3 = W(P) - W(He) - W(Al)$$

L'application numérique pour la réaction (1.2) redonne évidemment le même résultat.

1.2 Etat excité du ${}^{60}_{27}\mathrm{Co}$



Le photon emporte tout l'excès d'énergie entre les deux états :

$$\mathrm{E_\gamma = E^\star - E}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\mathrm{m(Co^\star)c^2} &= \mathrm{m(Co)c^2 + E_\gamma} \\
\mathrm{M(Co^\star)c^2 - 27m_ec^2} &= \mathrm{M(Co)c^2 - 27m_ec^2 + E_\gamma} \\
\mathrm{M(Co^\star)} &= \mathrm{M(Co) + E_\gamma/c^2}
\end{aligned}$$

On sait que $1\ \mathrm{uma} \times \mathrm{c}^2 = 931,5\ \mathrm{MeV}$, on a donc : $1\ \mathrm{MeV/c^2} = 1/931,5\ \mathrm{uma}$

Application numérique :

$$\mathrm{M(Co^\star) = 59,9352478\,uma}$$

1.3 Rayon du noyau : les noyaux miroirs

1) On peut tout d'abord évaluer les masses atomiques en fonction des masses nucléaires :

$$\begin{aligned}
\mathrm{M(^{15}N)} &= \mathrm{m(^{15}N) + 7m_e} \\
\mathrm{M(^{15}O)} &= \mathrm{m(^{15}O) + 8m_e}
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{m(^{15}N)} &= \mathrm{7m_p + 8m_n - W(^{15}N)} \\
\mathrm{m(^{15}O)} &= \mathrm{8m_p + 7m_n - W(^{15}O)}
\end{aligned}$$

La différence d'énergie de liaison entre ces 2 noyaux vaut donc :

$$\begin{aligned}
\Delta\mathrm{W} &= \mathrm{W(^{15}O) - W(^{15}N) = m_p - m_n - m(^{15}O) + m(^{15}N)} \\
\Delta\mathrm{W} &= \mathrm{M(^{15}N) - M(^{15}O) + M(H) - m_n}
\end{aligned}$$

avec $\mathrm{M(H) = m_e + m_p}$, la masse de l'atome d'Hydrogène.

Application numérique :

$$\Delta\mathrm{W} = \Big(15,000109 - 15,003065 + 1,007825 - 1,0086649\Big) \times 931,5 = -3,536\ \mathrm{MeV}$$

2) On utilise la formule semi-empirique pour ces 2 noyaux :

$$\begin{aligned}
\mathrm{W(^{15}O)} &= \mathrm{15a_v - a_s \times 15^{2/3} - a_c\frac{8\times 7}{15^{1/3}} - \frac{a_a}{15}} \\
\mathrm{W(^{15}N)} &= \mathrm{15a_v - a_s \times 15^{2/3} - a_c\frac{7\times 6}{15^{1/3}} - \frac{a_a}{15}}
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\Delta\mathrm{W} = \frac{-14\mathrm{a_c}}{15^{1/3}}$$

d'où :

$$a_c = \frac{-15^{1/3}\Delta W}{14} = 0,623 \text{ MeV}$$

3) On sait que le terme qui tient compte de la répulsion coulombienne est de la forme :

$$E_c = \frac{-3e^2 Z(Z-1)}{5 \times 4\pi\epsilon_0 R} = -a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}}$$

Or le rayon du noyau est donné par : $R = R_0 A^{1/3}$. On a donc par identification :

$$a_c = \frac{3e^2}{5 \times 4\pi\epsilon_0 R_0} \text{ soit } R_0 = \frac{3e^2}{5 \times 4\pi\epsilon_0 a_c}$$

avec $1/4\pi\epsilon_0 = 9 \times 10^9$ SI, on trouve : $R_0 = 1,39 \times 10^{-15}$ m $= 1,39$ fm ce qui est en bon accord avec la valeur du cours ($R_0 = 1,2$ fm).
On peut au passage calculer, avec cette valeur, le rayon de ces 2 noyaux : $R = R_0 A^{1/3} = 3,42$ fm.
4) Aucune ...
Le nombre de nucléons étant identique, la force nucléaire (interaction forte) est identique.
On le voit dans l'expression de l'énergie de liaison : tous les termes sont identiques, sauf la répulsion coulombienne. Du point de vue interaction électromagnétique, ils ne sont donc identiques (un proton de plus).

1.4 Fusion des noyaux d'hydrogène dans les étoiles

1- On utilise la conservation du nombre de nucléons (A) et de la charge électrique (q) :

$$\begin{aligned} {}^1_1H + {}^1_1H &\longrightarrow {}^2_1H + e^+ + \nu && (1.5)\\ {}^2_1H + {}^1_1H &\longrightarrow {}^3_2He + \gamma && (1.6)\\ {}^3_2He + {}^3_2He &\longrightarrow {}^4_2He + {}^1_1H + {}^1_1H && (1.7) \end{aligned}$$

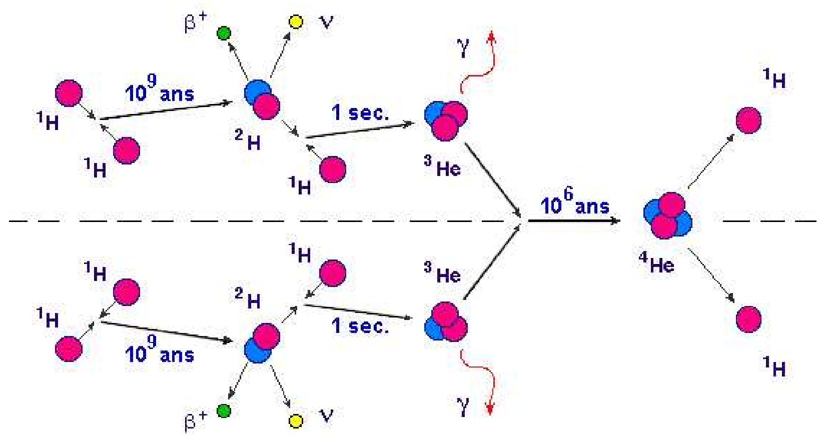
On peut noter que la première réaction fait intervenir un neutrino : elle est donc due à l'interaction faible.
2-

$$\begin{aligned} Q_2 &= \left[m({}^2_1H) + m({}^1_1H) - m({}^3_2He)\right]c^2 \\ &= \left[M({}^2_1H) + M({}^1_1H) - M({}^3_2He)\right]c^2 \\ &= 5,49 \text{ MeV} \end{aligned}$$

On a $Q_2 > 0$, la réaction est donc exoénergétique.

3- On voit que pour former un noyau d'${}^4_2$He, il faut 2 noyaux d'${}^3_2$He, donc 2 noyaux d'${}^2_1$H. Sachant qu'il n'y a pas au départ de ^{2}H ni de ^{3}He, on peut dire que la chaîne p-p nécessite :

chaîne p-p = 2×(1.5) + 2×(1.6) + (1.7)



Il y a donc utilisation de 6 noyaux d'Hydrogène (réactions (1.5) et (1.6)), et création de 2 noyaux d'Hydrogène par la réaction (1.7), soit une consommation au total de 4 protons.
Les temps caractéristiques des réactions sont indiqués sur la figure précédente, ce qui montre que pour le soleil la fusion thermonucléaire est contrôlée par l'interaction faible (réaction 1.5).

4- $\mathrm{Q_{pp} = 2Q_1 + 2Q_2 + Q_3 = 24,7\ MeV.}$

5- On peut tout d'abord calculer $\mathrm{Q_{pp}}$ en Joules :

$$\mathrm{Q_{pp} = 24,7 \times 10^6 \times 1,6 \times 10^{-19} = 3,95 \times 10^{-12}\ J}$$

Le nombre de chaînes p-p, par seconde est donc :

$$\mathrm{n = E/Q_{pp} = 9,7 \times 10^{37}}$$

Chaque chaîne p-p consomme 4 protons, la masse de protons consommée par seconde est donc :

$$\mathrm{M = 4 \times m(H) \times n = 3,9 \times 10^{38}\ uma = 6,5 \times 10^{11}\ kg}$$

6- On calcule la masse disponible :

$$\mathrm{M_{dispo} = \frac{70}{100} \times \frac{15}{100} \times M_{soleil} = 2,1 \times 10^{29}\ kg}$$

Le temps restant avec que le soleil n'ait consommé cette masse est :

$$\mathrm{t = \frac{M_{dispo}}{M} = 3,23 \times 10^{17}\ s \simeq 10^{10}\ ans}$$

soit 10 milliards d'années, ce qui l'ordre de grandeur obtenu avec des modèles plus raffinés.

1.5 Fission de l'Uranium 235

$$^{235}_{92}\mathrm{U} + \mathrm{n} \longrightarrow {}^{95}_{38}\mathrm{Sr} + {}^{A}_{Z}\mathrm{Xe} + 2\mathrm{n}$$

1) On utilise la conservation du nombre de nucléons (A) et de la charge électrique (q) :

$$\mathrm{Xenon} : \mathrm{A} = 139 \quad \mathrm{Z} = 54 \implies {}^{139}_{54}\mathrm{Xe}$$

2)

$$\begin{aligned}\mathrm{Q} &= \left[\mathrm{m(U)} + \mathrm{m_n} - \mathrm{m(Sr)} - \mathrm{m(Xe)} - 2\mathrm{m_n}\right]\mathrm{c}^2 \\ &= \left[\mathrm{M(U)} - \mathrm{M(Sr)} - \mathrm{M(Xe)} - \mathrm{m_n}\right]\mathrm{c}^2 \\ &= 0.1971131\mathrm{uma} \times \mathrm{c}^2 = 183,6\ \mathrm{MeV}\end{aligned}$$

On a $\mathrm{Q} > 0$, la réaction est donc exoénergétique.

3)a) Pour le noyau $^{235}_{92}\mathrm{U}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{W(U)} &= \left[92\mathrm{m_p} + 143\mathrm{m_n} - \mathrm{m(U)}\right]\mathrm{c}^2 \\ &= \left[92\mathrm{m_p} + 143\mathrm{m_n} - \mathrm{M(U)} + 92\mathrm{m_e}\right]\mathrm{c}^2 \\ &= \left[92\mathrm{M(H)} + 143\mathrm{m_n} - \mathrm{M(U)}\right]\mathrm{c}^2 = 1783,87\ \mathrm{MeV}\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}\mathrm{W(Sr)} &= \left[38\mathrm{M(H)} + 57\mathrm{m_n} - \mathrm{M(Sr)}\right]\mathrm{c}^2 = 812\ \mathrm{MeV} \\ \mathrm{W(Xe)} &= \left[54\mathrm{M(H)} + 85\mathrm{m_n} - \mathrm{M(Xe)}\right]\mathrm{c}^2 = 1155\ \mathrm{MeV}\end{aligned}$$

Pour comparer la stabilité de ces différents noyaux, il faut calculer l'énergie de liaison moyenne par nucléon (B) :

$$\begin{aligned}\mathrm{B(U)} &= \mathrm{W(U)}/239 = 7,59\ \mathrm{MeV/nucleon} \\ \mathrm{B(Sr)} &= \mathrm{W(Sr)}/95 = 8,55\ \mathrm{MeV/nucleon} \\ \mathrm{B(Xe)} &= \mathrm{W(Xe)}/139 = 8,31\ \mathrm{MeV/nucleon}\end{aligned}$$

On est donc passé d'un système peu lié, à 2 noyaux plus liés.
3)b)

$$\mathrm{Q} = \mathrm{W(Sr)} + \mathrm{W(Xe)} - \mathrm{W(U)} = 183,6\ \mathrm{MeV}$$

4)a) On utilise la valeur approchée de la masse molaire de l'$^{235}_{92}\mathrm{U}$: $\mathrm{M_{mol}} \simeq 235\ \mathrm{gmol^{-1}}$.
Un gramme d'Uranium contient donc :

$$x = \mathrm{N_A}/\mathrm{M_{mol}} = 2,56 \times 10^{21}\ \text{noyaux}$$

L'énergie totale libérée par la fission de 1 g d'Uranium est donc : $\mathrm{E} = x\mathrm{Q} = 7,53 \times 10^{10}\ \mathrm{J}$
b) L'énergie est donnée par : $\mathrm{E} = \mathrm{Mgh}$. Soit :

$$\mathrm{M} = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{gh}} = 7,68 \times 10^6\ \mathrm{kg}$$

Avec une densité de 1000 kg par m^3, on trouve un volume de $\mathrm{V} = 7,68 \times 10^3\ \mathrm{m}^3$, soit un cube de 20 m de côté