Série 2 : Cinématique des réactions

Les calculs sont faits dans l'approximation non-relativiste, par soucis de simplicité et parce que, pour ces exemples choisis, les énergies cinétiques mises en jeu sont faibles devant les énergies de masse.

2.0 Energies de recul : cas de la désintégration α

1) ${}^{218}_{84}\mathrm{Po} \longrightarrow {}^{214}_{82}\mathrm{Pb} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$
2) Par définition, $\mathrm{Q} = \left[\mathrm{m(Po)} - \mathrm{m(Pb)} - \mathrm{m(He)}\right]\mathrm{c}^2$
En utilisant les masses des atomes, on trouve :

$$\mathrm{Q} = \left[\mathrm{M(Po)} - 84\mathrm{m_e} - \mathrm{M(Pb)} + 82\mathrm{m_e} - \mathrm{M(He)} + 2\mathrm{m_e}\right]\mathrm{c}^2 = \left[\mathrm{M(Po)} - \mathrm{M(Pb)} - \mathrm{M(He)}\right]\mathrm{c}^2$$

L'application numérique donne : $\mathrm{Q} = 6,11\ \mathrm{MeV}$.
Le bilan d'énergie de masse est positif, la réaction est donc exoénergétique.

3) On note 1 les grandeurs relatives au Pb et 2 les grandeurs relatives à l'hélium.
On utilise la conservation de la quantité de mouvement :

$$\vec{0} = \vec{\mathrm{p}}_1 + \vec{\mathrm{p}}_2$$

le noyau de Polonium étant au repos dans l'état initial. On en conclut que $\mathrm{p}_1 = \mathrm{p}_2$ et que les deux noyaux sont émis avec un angle $\theta = 180°$ (dos-à-dos).
Il faut ensuite relier les quantités de mouvement aux énergies cinétiques (notées T). On a (en mécanique classique) :

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\mathrm{mv}^2 = \frac{\mathrm{m}^2\mathrm{v}^2}{2\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{p}^2}{2\mathrm{m}}$$

La condition $\mathrm{p}_1 = \mathrm{p}_2$, nous donne : $\mathrm{m}_1\mathrm{T}_1 = \mathrm{m}_2\mathrm{T}_2$.
Or, pour cette réaction, on a : $\mathrm{Q} = \mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2$, on en tire :

$$\mathrm{T}_1 = \frac{\mathrm{m}_2\mathrm{Q}}{\mathrm{m}_2 + \mathrm{m}_1} \quad \mathrm{T}_2 = \frac{\mathrm{m}_1\mathrm{Q}}{\mathrm{m}_2 + \mathrm{m}_1}$$

L'application numérique donne :

$$\mathrm{T}_1 = 0,11\ \mathrm{MeV} \quad \mathrm{T}_2 = 6\ \mathrm{MeV}$$

On en conclut logiquement que le noyau le plus léger emporte presque toute l'énergie.

2.1 Désintégration γ du Technitium

1) En première approximation, le photon γ emporte l'excès d'énergie. On a donc :

$$\mathrm{E_0 = \big[m(Tc^\star) - m(Tc)\big]c^2 = 1,535 \times 10^{-4}\ uma \times c^2 = 143\ keV}$$

2)a) On constate que si le photon emporte toute l'énergie, le noyau de Tc est donc au repos. Au niveau de la quantité de mouvement, on a donc dans l'état final une quantité de mouvement non-nulle (celle du photon) alors que la quantité de mouvement est nulle dans l'état initial (noyau $\mathrm{Tc^\star}$ au repos).
La quantité de mouvement n'est donc pas conservée, à cause de l'approximation. Il faut donc dans la suite considérer le recul du noyau Tc.
b) On fait le bilan d'énergie totale et de quantité de mouvement :

$$\mathrm{m(Tc^\star)c^2 = m(Tc)c^2 + E_\gamma + T(Tc)} \tag{2.1}$$
$$\vec{0} = \vec{p}_\gamma + \vec{p}\mathrm{(Tc)} \tag{2.2}$$

De l'équation (2.2), on déduit que l'angle entre le photon et le noyau Tc est $180°$ et que $\mathrm{p(Tc) = p_\gamma = E_\gamma/c}$.
En notant que $\mathrm{T(Tc) = p^2(Tc)/2m(Tc)}$, l'équation (2.1) peut alors se réécrire :

$$\Delta \mathrm{E = E_\gamma + \frac{E_\gamma^2}{2m(Tc) \times c^2}}$$

c) Il s'agit d'une équation du 2ième degré dont l'inconnue est $\mathrm{E_\gamma}$. On trouve 2 solutions :

$$\mathrm{E_1 = -m(Tc)c^2 + m(Tc)c^2 \times \sqrt{1 + \frac{2\Delta E}{m(Tc)c^2}}}$$
$$\mathrm{E_2 = -m(Tc)c^2 - m(Tc)c^2 \times \sqrt{1 + \frac{2\Delta E}{m(Tc)c^2}}}$$

La solution $\mathrm{E_2}$ est négative, la solution physiquement acceptable pour l'énergie du γ est donc $\mathrm{E_1}$.
3)a) Si $\Delta\mathrm{E} \ll \mathrm{m(Tc)c^2}$, on peut effectuer un développement limité, avec $\epsilon = 2\Delta\mathrm{E/mc^2}$:

$$\mathrm{E_1 = -m(Tc)c^2 + m(Tc)c^2\big[1 + \frac{1}{2}\frac{2\Delta E}{m(Tc)c^2} - \frac{1}{8}\frac{4\Delta E^2}{m^2(Tc)c^4}\big]}$$
$$\mathrm{E_1 = \Delta E - \frac{\Delta E^2}{2m(Tc)c^2}}$$

b) La correction relative entre la valeur $\mathrm{E_0 = \Delta E}$ et $\mathrm{E_1}$ est donnée par :

$$\mathrm{\frac{E_1 - E_0}{E_0} = -\frac{\Delta E}{2m(Tc)c^2} = -7,7 \times 10^{-7}}$$

On peut noter que la correction est très faible, l'approximation initiale était donc tout à fait justifiée !
La valeur est négative, en effet à cause du recul du noyau, le photon emporte un peu moins d'énergie que dans la première approximation.

2.2 Première transmutation artificielle

$$ {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{14}_{7}\mathrm{N} \longrightarrow {}^{1}_{1}\mathrm{H} + {}^{17}_{8}\mathrm{O} \quad (2.3)$$
$$ (1) + (2) \longrightarrow (3) + (4) \quad (2.4)$$

1) $\mathrm{Q} = \left[\mathrm{M(He)} + \mathrm{M(N)} - \mathrm{M(H)} + \mathrm{M(O)}\right]\mathrm{c}^2 = -1,19\ \mathrm{MeV}.$
La réaction est endoénergétique. Elle consomme de l'énergie. Il faut donc que la particule α ait une énergie suffisante pour que la réaction soit possible.

2) On utilise le théorème de König pour le système de particules (3+4) : $\boxed{\mathbf{T = T_{CM} + T^\star}}$.
où $\mathrm{T}^\star$ est l'énergie cinétique dans le référentiel du centre de masse (de 3 et 4) et T dans le référentiel du laboratoire.
On peut tout d'abord calculer le terme $\mathrm{T_{CM}}$:

$$\mathrm{T_{CM}} = \frac{1}{2}(\mathrm{m_3} + \mathrm{m_4})\mathrm{V_G^2} \quad \text{avec } \overrightarrow{\mathrm{V}}_\mathrm{G} = \frac{\mathrm{m_3}\overrightarrow{\mathrm{V}}_3 + \mathrm{m_4}\overrightarrow{\mathrm{V}}_4}{\mathrm{m_3} + \mathrm{m_4}}$$

Or par conservation de la quantité de mouvement, on sait que :

$$\overrightarrow{\mathrm{p}}_1 = \overrightarrow{\mathrm{p}}_3 + \overrightarrow{\mathrm{p}}_4 = \mathrm{m_3}\overrightarrow{\mathrm{V}}_3 + \mathrm{m_4}\overrightarrow{\mathrm{V}}_4$$

On trouve donc :

$$\mathrm{T_{CM}} = \frac{1/2 \times \mathrm{P_1^2}}{\mathrm{m_3} + \mathrm{m_4}} = \frac{\mathrm{m_1 T_1}}{\mathrm{m_3} + \mathrm{m_4}}$$

On a donc, en utilisant le théroème de König, pour l'état final et dans le référentiel du laboratoire :

$$\mathrm{T_F} = \frac{\mathrm{m_1 T_1}}{\mathrm{m_3} + \mathrm{m_4}} + \mathrm{T_F^\star}$$

On sait que le minimum (le seuil), c'est-à-dire le moins couteux en énergie et de produire les particules 3 et 4 au repos dans leur référentiel du centre de masse, soit $\mathrm{T_F^\star} = 0$.
Le bilan d'énergie de masse nous indique :

$$\mathrm{Q} = \mathrm{T_F} - \mathrm{T_I}$$

Or, dans l'état initial, seul le noyau d'hélium est en mouvement, on a donc : $\mathrm{T_I} = \mathrm{T_1}$.
On en déduit :

$$\mathrm{T_1} > \frac{-\mathrm{Q}(\mathrm{m_3} + \mathrm{m_4})}{\mathrm{m_3} + \mathrm{m_4} - \mathrm{m_1}}$$

L'application numérique donne $\mathrm{T_1^{mini}} = 1,53\ \mathrm{MeV}$.

3) On dispose de deux sphères chargées. On peut faire l'approximation de 2 charges ($\mathrm{Z_1}$ et $\mathrm{Z_2}$) distantes de $R_1 + R_2$. L'énergie de répulsion électromagnétique est :

$$\mathrm{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\hbar\mathrm{c}} \times \frac{\mathrm{Z_1 Z_2 e^2}}{\mathrm{R_1} + \mathrm{R_2}} = \alpha\hbar\mathrm{c} \times \frac{\mathrm{Z_1 Z_2 e^2}}{1,23 \times (4^{1/3} + 14^{1/3}} \simeq 4\ \mathrm{MeV}$$

4) L'énergie seuil calculée en **2)** est celle que doit avoir l'α au moment où il touche le ^{14}N... mais avant il faut franchir la barrière coulombienne (les deux étant chargés positivement) qui est comme nous venons de le voir de 4 MeV. Le seuil pour la réaction est donc plutôt voisin de 5,5 MeV... bien sûr la réaction peut avoir lieu en dessous du seuil par effet tunnel mais avec une probabilité très faible...
Lors de son expérience Rutherford a par exemple pu utiliser une source radioactive de Polonium (cf. exercice 2.0), qui émet des α de 6 MeV.

2.3 Désintégration à 3 corps

1) La conservation de la quantité de mouvement totale et de l'énergie totale s'écrit :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{0} &= \overrightarrow{p}_1 + \overrightarrow{p}_2 + \overrightarrow{p}_3 && (2.5) \\ Q &= T_1 + T_2 + T_3 && (2.6) \end{aligned}$$

où $\overrightarrow{p}_i$ sont les quantités de mouvement des 3 particules émises (T_i les énergies cinétiques).
On cherche l'énergie cinétique minimale que peut avoir la particule 3.
A priori $T_3^{min} = 0$ est possible, on aurait alors : $\overrightarrow{p}_3 = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \overrightarrow{p}_1 = -\overrightarrow{p}_2$ et :

$$T_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} Q \text{ et } T_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} Q$$

De la même façon, on pourrait *a priori* dire que $T_3^{max} = Q$, ce qui implique d'après (2.6) que : $T_1 = T_2 = 0$. Les particules 1 et 2 sont au repos.
On a donc : $p_1 = p_2 = 0$, ce qui implique d'après (2.5) que $p_3 = 0$. On se trouve donc devant une contradiction, la particule 3 a une quantité de mouvement nulle et une énergie cinétique non nulle (on rappelle que $p^2 = 2mT$)... ce n'est pas la bonne solution !!

On peut néanmoins garder l'idée que la particule 3 aura la maximum d'énergie cinétique lorsque les 2 autres auront le minimum, la somme étant constante : $Q = T_1 + T_2 + T_3$.
On choisit donc comme système les particules 1 et 2, et on a donc :

$$Q = T_{12}^{min} + T_3^{max} \qquad (2.7)$$

On cherche donc à évaluer le minimum d'énergie cinétique pour le système (1+2). On applique ensuite au système de particules 1+2, le théorème de König :

$$T_{12} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_G^2 + T_{12}^{\star} \qquad (2.8)$$

où V_G est la vitesse du centre de masse de (1+2) :

$$\overrightarrow{V}_G = \frac{m_1 \overrightarrow{V}_1 + m_2 \overrightarrow{V}_2}{m_1 + m_2} = \frac{\overrightarrow{p}_1 + \overrightarrow{p}_2}{m_1 + m_2}$$

La conservation de la quantité de mouvement totale donne : $\overrightarrow{p}_1 + \overrightarrow{p}_2 = -\overrightarrow{p}_3$, avec $p_3 = \sqrt{2 m_3 T_3}$.
On a donc :

$$T_{CM} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_G^2 = \frac{1}{2} \frac{2 m_3 T_3}{m_1 + m_2}$$

L'équation (2.8) donne donc :

$$T_{12} = \frac{m_3 T_3}{m_1 + m_2} + T_{12}^{\star}$$

Dans le référentiel du centre de masse (du système 1+2), l'énergie cinétique de (1+2) minimale correspond à $T_{12}^{\star} = 0$, soit :

$$T_{12}^{min} = \frac{m_3 T_3^{max}}{m_1 + m_2}$$

On utilise (2.7) et on en déduit donc l'énergie maximale de la particule 3 :

$$T_3^{max} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3} \times Q$$

Les autres grandeurs se déduisent par analogie.

2) On applique ce que l'on vient de trouver :

$$T_e^{max} = \frac{m(He) + m(\nu)}{m(He) + m(\nu) + m_e} \times Q = \frac{m(He)}{m(He) + m_e} \times Q$$

la masse de l'antineutrino étant considérée comme nulle.
Le bilan d'énergie de masse est donné par :

$$Q = \left[m(^3H) - m_e - m(^3He) - m(\bar{\nu})\right]c^2 = \left[M(^3H) - m_e - M(^3He) + 2m_e - m_e\right]c^2$$

Soit :

$$Q = \left[M(^3H) - M(^3He)\right]c^2 = 18,63 \text{ keV}$$

On en déduit

$$T_e^{max} = \frac{M(He) - 2m_e}{M(He) - m_e} \times Q = 18,62 \text{ keV}$$

En conclusion, l'électron est créé avec une énergie variant continument entre 0 et $18,62$ keV. On a un spectre continu caractéristique des processus à 3 corps.

Remarque : si la désintégration β^- se faisait en 2 corps (sans antineutrino), on aurait 1 énergie bien définie pour l'électron (comme pour la désintégration α, cf. ex. 2.0), c'est-à-dire un spectre de raies.
C'est précisemment cette différence entre l'observation d'un spectre continu et un spectre de raies attendu théoriquement qui a amené Wolfgang Pauli à introduire une troisième particule dans la désintégration β et donc à postuler en 1930 l'existence du **neutrino**.