Université Joseph Fourier L2 UE Phy 242

Corrigé des TD de Physique Quantique

C. Hoffmann, G. Méjean 2008

1 Rayonnement du corps noir

Soit $u(\omega, T)$ la densité spectrale et volumique d'énergie du rayonnement d'un corps noir à la température T. C'est à dire, l'énergie électromagnétique par unité de volume, dans la bande de pulsation comprise entre ω et $\omega + d\omega$, est

$$de = u(\omega, T)d\omega.$$

1. Montrer que l'équation aux dimensions de u est

$$[u] = ML^{-1}T^{-1}.$$

e est une énergie par unité de volume. On a :

$$[u] = \frac{[E]}{[V][\omega]} = \frac{ML^2T^{-2}}{L^3T^{-1}} = ML^{-1}T^{-1}$$

2. On rappelle qu'en thermodynamique classique, à tout degré de liberté d'un système à la température T correspond une énergie moyenne de l'ordre de kT où $k = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K est la constante de Boltzmann. Montrer qu'en théorie classique, u est nécessairement de la forme (formule dite de Rayleigh-Jeans) :

$$u_{cl} = A\, c^x \omega^y (kT)^z,$$

où c est la vitesse de la lumière et A une constante numérique inconnue. Calculer les exposants x, y, z.

La dimension de u_{cl} est :

$$[u_{cl}] = [v]^x[\omega]^y[E]^z = (LT^{-1})^x(T^{-1})^y(ML^2T^{-2})^z = L^{(x+2z)}T^{(-x-y-2z)}M^z.$$

En comparant avec 1, on trouve le système d'équations :

$$z = 1$$

$$x + 2z = -1 \Rightarrow x = -2z - 1 = -3$$

$$-x - y - 2z = -1 \Rightarrow y = -x - 2z + 1 = 2$$

On obtient finalement :

$$u_{cl} = A\frac{\omega^2}{c^3}kT.$$

3. Montrer que l'expression précédente est physiquement absurde en évaluant l'énergie totale par unité de volume :

$$e_{cl}(T) = \int_0^\infty u_{cl}(\omega, T) d\omega.$$

La difficulté provient-elle des hautes ou des basses fréquences ?

$$e_{cl}(T) = A\frac{kT}{c^3}\int_0^\infty \omega^2 d\omega = A\frac{kT}{c^3}\left[\frac{1}{3}\omega^3\right]_0^\infty \to \infty.$$

La difficulté provient des hautes fréquences où l'intégrale diverge.

4. C'est la physique quantique qui permet de résoudre le paradoxe. La densité d'énergie est en réalité de la forme :

$$u(\omega, T) = u_{cl}(\omega, T) f(\frac{\hbar\omega}{kT}).$$

Reste à trouver la fonction f. Compte tenu qu'elle a pour rôle d'éliminer la difficulté apparue en 3, déduire les limites de la fonction f à l'origine et à l'infini.

Quand ω tend vers 0, il faut retrouver l'expression classique u_{cl}, donc :

$$\lim_{\omega \to 0} f = 1.$$

Quand ω tend vers l'infini, il faut que l'énergie totale reste finie. f doit rattrapper la divergence en ω^2 de u_{cl} :

$$\lim_{\omega \to \infty} \omega^2 f = 0.$$

5. Pour les hautes fréquences, Wien proposa une formule approchée d'origine expérimentale :

$$u_W(\omega, T) \propto \omega^3 \exp(-a\omega/T),$$

où a est une constante. Montrer que ceci implique pour $\omega \to \infty$, $f \propto \omega e^{-a\omega/T}$.

Il faut comparer l'expression en 4 : $u = u_{cl} f \propto \omega^2 f$ à la formule de Wien $u_W(\omega, T) \propto \omega^3 \exp(-a\omega/T)$, valable pour les hautes fréquences. On en déduit dans la limite $\omega \to \infty$:

$$f \propto \omega \exp(-a\omega/T).$$

6. Planck trouva en 1900 la fonction f en cherchant une interpolation plausible entre les formules de Rayleigh-Jeans et de Wien :

$$f = \frac{\frac{\hbar\omega}{kT}}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1}$$

Montrer qu'on retrouve bien ces limites pour les hautes et basses fréquences.

A basses fréquences $\hbar\omega << kT$:

$$\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) \approx 1 + \frac{\hbar\omega}{kT}.$$

f tend vers 1 et on a $u = u_{cl}$, le comportement prévu par la formule de Rayleigh-Jeans.

A hautes fréquences : $\hbar\omega >> kT$:

$$\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1 \approx \exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)$$

$$\Rightarrow f = \frac{\hbar\omega}{kT}\exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right) \propto \omega \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right),$$

comportement prévu par la formule de Wien pour $a = \hbar/k$. On retient l'expression exacte pour la densité d'énergie d'un corps noir :

$$u(\omega, T) = A \frac{\hbar}{c^3} \frac{\omega^3}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1},$$

avec $A = \pi^{-2}$.

7. *Exercice hors séance de TD :*
   Montrer que l'énergie totale :

$$e(T) = \int_0^\infty u(\omega, T) d\omega$$

est donnée par $e(T) = \sigma T^4$ avec $\sigma = 7,5 \times 10^{-16}$ $\mathrm{Jm^{-3}K^{-4}}$(loi de Stefan-Boltzmann). Effectuer le changement de variable $x = \hbar\omega/kT$ et utiliser $A = \pi^{-2}$ ainsi que

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}.$$

$$x = \frac{\hbar\omega}{kT} \Rightarrow dx = \frac{\hbar}{kT} d\omega$$

$$\Rightarrow e(t) = \int_0^\infty u(\omega, T) d\omega = \frac{1}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\hbar\omega^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \frac{(kT)^3}{\hbar^2} d\omega = \frac{1}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \frac{(kT)^4}{\hbar^3} \left(\frac{\hbar}{kT} d\omega\right)$$

$$= \frac{k^4}{\pi^2 c^3 \hbar^3} T^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \sigma T^4,$$

avec $\sigma = \frac{8\pi^5 k^4}{15 c^3 h^3}$. Attention, on trouve souvent $\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3} = 5,67 \times 10^{-8}$ $\mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}$, une valeur qui se réfère à une autre forme de la loi Stefan-Boltzmann : $p = \sigma T^4$, où p est la *puissance* émise par un corps noir par *unité de surface*.

2 Cellule photoélectrique

Le métal formant la cathode d'une cellule photoélectrique (voir schéma du cours) est caractérisé par un travail d'extraction $W_e = 2.5$ eV. On l'éclaire avec de la lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 400$ nm. On donne $\hbar c = 197.3$ eV.nm, charge de l'électron $-e = -1.6 \times 10^{-19}$ C.

1. Pour la lumière utilisée, l'effet photoélectrique peut-il avoir lieu ? Justifiez votre réponse.
   Oui, car l'énergie des photons est supérieure au travail d'extraction :

$$h\nu = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda} = 2\pi \times 197.3/400 = 3.10\ eV$$

2. Calculez l'énergie cinétique des électrons au moment de leur émission.

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = h\nu - W_e = 3.1 - 2.5 = 0.6\ eV$$

3. Que se passe-t-il si on inverse la polarité ? Donnez la définition du potentiel d'arrêt U_0 et calculez sa valeur.
Si on inverse la polarité on repousse les électrons ; ils seront arrêtés si :

$$-eU_0 \geq E_c = h\nu - W_e \Rightarrow -eU_0 \geq h\nu - W_e,$$

où $U_0 < 0$ est le potentiel d'arrêt. Quand $U = U_0$, le courant tombe à zéro, c'est à dire que plus aucun électron n'arrive sur l'anode. Ici on a :

$$-eU_0 = h\nu - W_e = 0.6\ eV \Rightarrow U_0 = -0.6\ V$$

4. On fixe U à 10 Volts. Calculez l'énergie cinétique des électrons lors de leur arrivée sur l'anode.
On a maintenant :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = h\nu - W_e + eU = 3.1 - 2.5 + 10 = 10.6\ eV$$

5. Pour $U = 10$ Volts, on a atteint le courant de saturation de la cellule. Expliquez ce que cela signifie.
Cela signifie que tous les électrons extraits sont collectés.
6. Le courant mesuré est $I = 1.6\ \mu$A, lorsque la cathode reçoit une puissance lumineuse $P = 10^{-4}$ W. Quel est le rendement quantique R de la cellule, défini comme le rapport entre le nombre d'électrons émis et le nombre de photons reçus ?
$I = n_e e = \frac{dq}{dt}$ et $P = n_{ph} h\nu = \frac{dE}{dt}$, où n_e (n_{ph}) sont les nombres d'électrons émis (photons réçus) par unité de temps. D'après la définition, le rendement R est :

$$R = \frac{n_e}{n_{ph}} = \frac{I/e}{P/h\nu} = \frac{Ih\nu}{\lambda eP} = 0.05$$

7. Que peut-on faire pour augmenter le courant de saturation : augmenter le flux de photons atteignant la cellule ou bien diminuer la longueur d'onde de la lumière ? Justifiez votre réponse.
Pour augmenter le courant de saturation il faut augmenter le flux de photons : le nombre d'électrons extrait par unité de temps est proportionnel à ce flux. Diminuer la longueur d'onde ne ferait qu'augmenter l'énergie cinétique des électrons sans en augmenter le nombre.

3 Classique ou quantique ?

En calculant l'action caractéristique, décidez si le recours à la physique quantique est nécessaire pour étudier les objets suivants ou si la théorie classique est suffisante :

La dimension d'une action est :

$$[\mathcal{A}] = [E][t] = ML^2T^{-2}T = ML^2T^{-1}.$$

Par analyse dimensionnelle, on trouve la formule pour l'action qui caractérise le problème physique. Si $\mathcal{A} \approx \hbar$, le recours à la physique quantique est nécessaire.

1. Une antenne radio : puissance 5 kW et fréquence d'émission dans le domaine des ondes radio.
$[P] = ML^2T^{-1}$ et $[\omega] = T^{-1}$. On voit facilement $\mathcal{A} = P/\omega^2$. Le domaine des ondes radio s'étale de 10 kHz à 100 MHz environ. Prenons par exemple $f = 1$ MHz :

$$\mathcal{A} = 5000W/(2\pi 10^6)^2 = 1,2 \times 10^{24}\hbar.$$

Une description classique est bien suffisante.

2. Un noyau atomique : énergie de liaison typique 8 MeV, rayon $r_A \approx A^{1/3} r_0$ avec A le nombre de masse et $r_0 = 1,2$ fm et masse d'un nucléon $m = 1,6 \times 10^{-27}$ kg.

   $[E] = ML^2T^{-2}$, $[r] = L$ et $[m] = M$. Posant $\mathcal{A} = E^x r^y m^z$, on obtient $x = z = 0.5$ et $y = 1$, donc $\mathcal{A} = \sqrt{Emr}$. En prenant $A = 1$ ($\Rightarrow r = 1.2$ fm), on obtient $\mathcal{A} \approx 0,5\hbar$. La physique nucléaire nécessite une approche quantique ! (C'était d'ailleurs pas du tout évident que les concepts développés pour expliquer les propriétés électroniques de l'atome marchent à l'échelle du noyau.)

3. L'hélium superfluide : température de transition $T_{SF} = 2,18$ K, distance moyenne entre atomes $a = 0,36$ nm et masse $m = 6,7 \times 10^{-27}$ kg.

   L'hélium se liquéfie à très basse température ($T = 4,2$ K). A une température T_{SF} encore plus basse, le liquide subit une transition de phase au delà de laquelle sa viscosité est nulle. Ses propriétés (macroscopiques !) sont alors très étonnantes (conduction de la chaleur très élevée, effet fontaine,...). L'échelle d'énergie du phénomène est donnée par kT_{SF}. Avec la distance interatomique et la masse, on peut calculer une action caractéristique $\mathcal{A} = \sqrt{kTma} = 1,5\hbar$. La superfluidité, phénomène pourtant observable à l'échelle macroscopique, nécessite bien une explication quantique !