Université Joseph Fourier L2 UE Phy 242

Corrigé des TD de Physique Quantique

C. Hoffmann, G. Méjean 2008

7 Onde associée de de Broglie

1. Calculer la longueur d'onde de :
   $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$
   (a) la terre dans son mouvement autour du soleil ($m = 6 \times 10^{24}$ kg, $v = 3 \times 10^4$ ms^{-1}),
   $\lambda = 3,7 \times 10^{-63}$ m.
   (b) un homme marchant à un pas normal,
   Supposant $m = 80$ kg et $v = 5$ km/h=1,4 m/s, on calcule $\lambda = 6 \times 10^{-36}$ m.
   (c) une goutte de pluie tombant dans l'atmosphère.
   Des gouttes de pluie ont des diamètres entre quelques dizaines de micromètres et quelques millimètres. Prenons un millimètre : dans ce cas, la vitesse limite de chute (cf. Phy110) vaut environ 10 km/h=2,8 m/s. Avec la masse volumique d'eau, on calcule une masse de 0,52 mg et finalement $\lambda = 4,6 \times 10^{-28}$ m.

   Quelle conclusion en tirez-vous ?
   Terre, hommes et gouttes de pluie peuvent être traités de façon classique. Leurs longueurs d'ondes associées sont négligeables devant les dimensions typiques des problèmes dans lesquelles ils interviennent.
2. **Diffraction sur un cristal**
   (a) On effectue une expérience de diffraction sur un cristal dans les conditions de Bragg avec des rayons X de longueur d'onde $\lambda = 0.18$ nm. Le premier maximum de diffraction est observé pour un angle $\theta_1 = 15°$. Quelle est la distance entre deux plans atomiques ?
   Dans les conditions de Bragg, on a : $2d \sin\theta = \lambda$; soit ici :
   $$d = \frac{\lambda}{2\sin\theta} = \frac{0.18}{0.518} = 0.347\ nm$$
   (b) On veut remplacer le faisceau de rayons X en 2a par des neutrons de même longueur d'onde fournie par le réacteur nucléaire de l'Institut Laue Langevin (ILL) à Grenoble. Quelle doit être l'énergie cinétique de ces neutrons ?

   Calculons d'abord la quantité de mouvement $p = h/\lambda$ avec $\lambda = 0.18$ nm $= 1,8 \times 10^5$ fm :
   $$pc = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda} = \frac{2\pi 197.3}{10^5} = 0.0069\ MeV$$
   ici les neutron ne sont pas relativistes car $pc = 0.0069\ MeV << m_0c^2 = 940\ MeV$, on peut donc utiliser la formule classique :
   $$E_c = \frac{p^2}{2m} = \frac{p^2c^2}{2mc^2} = \frac{4.7 \times 10^{-5}}{2 \times 940} = 2.5 \times 10^{-8}\ MeV = 25\ meV$$

Trois sources de neutrons d'énergies différentes, suivant la température du milieu où les neutrons sont amenés à l'équilibre thermique, sont disponibles :
- la source froide, constituée de deutérium liquide à $T_f = 25$ K,
- la source ordinaire constituée par le modérateur (eau lourde) à la température $T = 300$ K,
- la source chaude, constituée d'un bloc de graphite à $T_c = 2400$ K.

Quelle source utiliser pour mener ces études ?

$E \approx kT \Rightarrow$ 25 K correspond à 2,2 meV, 300 K à 25 meV et 2400 K à 415 meV. On utilisera donc la source ordinaire.

(c) Dans les données de l'expérience originale de Davisson et Germer (voir le cours), le premier pic était obtenu pour $\theta = 65°$ et une différence de potentiel accélératrice $U = 54$ V. Quelle est la longueur d'onde associée aux électrons ainsi accélérés ? En déduire l'espacement entre deux plans du cristal de nickel utilisé.

Le théorème de l'énergie cinétique nous donne :

$$\frac{1}{2}mv^2 = eU \Rightarrow v = \frac{\sqrt{2eU}}{m}$$

La longueur d'onde associée aux électrons est donc :

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2meU}} = \frac{2\pi\hbar c}{\sqrt{2mc^2eU}} \frac{2\pi \times 197.3}{\sqrt{2 \times 511000 \times 54}} = 0.167\ nm$$

En utilisant la relation de Bragg et la longueur d'onde de de Broglie on a :

$$\frac{N}{2d\sin\theta} = \frac{1}{\lambda}$$

soit, pour $N = 1$:

$$d = \frac{\lambda}{2\sin\theta} = \frac{0.167}{2 \times \sin(65°)} = 0.092\ nm$$

(d) Comparer les énergies cinétiques (en eV) des photons, des neutrons et des électrons utilisés dans ces trois expériences.

On trouve $E_{ph} = h\nu = 6,9$ keV, $E_e = 54$ eV et $E_n = 25$ meV. On peut donc retenir : on obtient des longueurs d'ondes adaptées à l'étude de cristaux avec des neutrons thermalisés à l'ambiante (25 meV) ; avec des électrons de 100 eV et des photons de 10 keV.

3. **Diffraction sur un noyau atomique**

La méthode habituelle pour déterminer la taille et la forme d'un objet est d'étudier la manière dont il diffuse les rayonnements. En physique subatomique, les objets à observer sont les noyaux, les nucléons qui les composent, voire les quarks qui constituent les nucléons. L'ordre de grandeur est donc le fm.

(a) Quelle est l'énergie des photons correspondants à des longueurs d'onde $\lambda \approx 1$ fm ?

L'énergie des photons est

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda} = \frac{2\pi \times 197.3}{1} \approx 1.24 \text{ GeV}$$

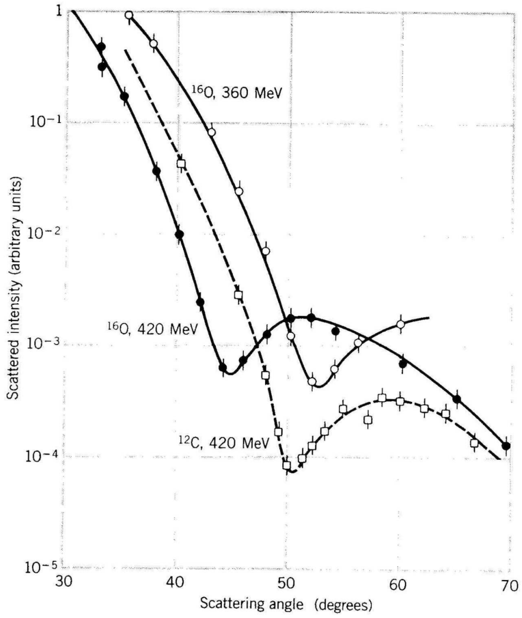

FIG. 1 –

(b) Les photons très énergétiques sont trop difficiles à produire et à détecter ; on peut alors essayer d'utiliser des électrons de longueur d'onde associée $\lambda = h/p$ (attention, l'énergie cinétique d'un électron de longueur d'onde égale à 1 fm est tellement grande qu'il faut le traiter de manière relativiste (voir cours), on peut donc écrire $p \approx E/c$.) Ces électrons peuvent être produits dans des accélérateurs linéaires comme celui du Jefferson Laboratory aux USA et détectés par des dispositifs appropriés.
Une expérience de diffusion consiste à envoyer un faisceau d'électrons sur une cible et à détecter les électrons diffusés dans l'angle solide $d\Omega$ couvert par le détecteur dans la direction θ. La figure 1 montre les courbes des nombres d'électrons détectés en fonction de l'angle de diffusion lors d'une expérience de diffusion d'électrons sur le carbone et l'oxygène. En faisant une analogie avec la diffraction de la lumière par un disque opaque de diamètre D (le premier minimum doit être situé à l'angle θ tel que $\sin(\theta) = 1.22\lambda/D$), donner l'ordre de grandeur du rayon des noyaux d'oxygène et de carbone.

Pour les électrons de 420 MeV et 360 MeV, on trouve les longueurs d'ondes avec la formule $\lambda = h/p = 2\pi\hbar c/E$, donc $\lambda_{420} \approx 2.95$ fm et $\lambda_{360} \approx 3.44$ fm.
Pour le noyau d'oxygène on a, en utilisant le minimum à $\approx 45°$ correspondant à $\lambda_{420} \approx 2.95$ fm, $D = 1.22 \times 2.95/0.707 = 5.09$ fm. En utilisant le minimum à $\approx 53°$ correspondant à $\lambda_{360} \approx 3.44$ fm, $D = 1.22 \times 3.44/0.799 = 5.25$ fm. Ce qui est assez cohérent compte tenu de la valeur approchée de la lecture des angles sur le graphique.
Pour le noyau de carbone, on a, en utilisant le minimum à $\approx 50°$ correspondant à $\lambda_{420} \approx 2.95$ fm, $D = 1.22 \times 2.95/0.766 = 4.7$ fm.

(c) Calculer la longueur d'onde associée de particules α d'une énergie cinétique $E = 40$ MeV. Ces particules, sont-elles adaptées à l'étude de noyaux atomiques par diffusion ?

Les particules α ont une masse d'environ 3760 MeV (bien supérieure à E), elles peuvent donc être traitées de façon classique : $\lambda = h/p = h/\sqrt{2mE} = 2,3$ fm. Avec cette longueur d'onde, elles sont bien adaptées à l'étude du noyau.
En conclusion, l'étude nucléaire est difficilement faisable avec des photons. Cependant, on peut par exemple utiliser des électrons d'environ 400 MeV ou des particules α de 40 MeV.

8 Une particule dans une boîte

On se place à 1 dimension et on considère une particule soumise au potentiel $V(x)$ suivant :

$$\begin{aligned} V(x) &= 0 \ si \ 0 < x < L \\ V(x) &= \infty \ sinon \end{aligned}$$

1. Les solutions de l'équation de Schrödinger constituent des ensembles discrets de niveaux d'énergie et de fonctions d'onde associées (revoir le cours !).
   Quelle est la valeur de l'énergie du fondamental ? Pourquoi n'est elle pas nulle ?
   L'énergie du fondamental s'écrit :
   $$E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$$
   Elle ne correspond pas à une particule au repos parce que le principe d'Heisenberg nous dit qu'on ne peut pas avoir une particule au repos avec une impulsion nulle ! L'impulsion la plus petite correspond à l'incertitude la plus grande sur la position : la taille de la boîte ! L'impulsion minimale est $\approx \frac{\hbar}{L}$ et donc, l'énergie minimale $\approx \frac{\hbar^2}{2mL^2}$: elle ne peut pas être nulle.
2. Quelle est la différence d'énergie entre deux niveaux successifs ? Que peut on en conclure pour L grand ?
   $$E_{n+1} - E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 (2n+1)}{2mL^2} \propto \frac{1}{L^2}$$
   Les niveaux sont serrés pour L grand : tout se passe comme si on pouvait remplacer les niveaux discrets par un continuum.